

مقدمه:

معنی کلمه "م탈ورژی" : کار روی فلزات است. "اورژ" در فرانسه به معنی "کار روی چتری" است. در این درس شکل دادن در حالت جامد مطرح است. شکل دادن در حالت مذاب مربوط به ریخته گری می شود.

مثبت مواد عبارتست از: فلز - سرامیک - پلیمر. از ترکیب این سه ماده ی ترکیب یا کامپوزیت درست می آید.

شکل دادن فلزات دو جنبه دارد: مکانیکی - متالورژیکی

دیدگاه متالورژیکی به درون ماده می پردازد مثل آتم ها، عیوب شبکه و... عیوب در تغییر شکل اهمیت زیادی دارد؛ به عبارتی به آن کمک می کند. این عیوب سه دسته اند:

1- خطی یا dislocation 2- نقطه ای مثل vacancy 3- صفحه ای: سطح حلقه ای شدن

اما دیدگاه مکانیکی به درون ماده کاری ندارد و به تاثیر نیروها، گشتاورها در تنش و کرنش می پردازد.

این درس به دیدگاه مکانیکی مربوط است. از این جهت فرقی نمی کند که شکل دادن فلزات را در

نظر بگیریم یا شکل دادن مواد. زیرا به ساختار مولکولی، داننه ها، مرز داننه ها و عیوب کاری نداریم.

مقدوسی هم این درس استاتیک است یعنی حالت تعادل پایدار. اما ممکن است نیروهای دینامیکی داشته باشیم مثل ضربه زدن. در این حالت شتاب نیز داریم که برآوردش خواهد گذاشت.

مفهوم ترمودینامیکی تنش:

در حالت تعادل، اتم‌ها در یک فاصله‌ی تعادلی از هم قرار دارند. هرگونه عاملی (نیروئی) که بخواد این تعادل را بهم زند (خارج کردن اتم‌ها از این موقعیت)، تنش نام دارد. میزان جابجائی این ذرات کرنش است. عبارت دیگر، حالتی که تمایل دارد اتم‌ها در این وضعیت حفظ کنند، تنش نام دارد.

این مباحث مربوط به مکانیک مواد (مقاومت مصالح) است.

بحث این درس اندازه‌گیری مقدار تغییر شکل است.

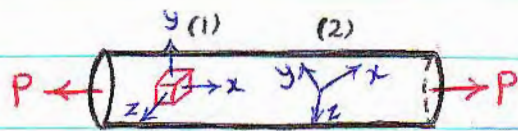
یکی از مباحث هم در شکل دادن دمای کار کردن است که هم در دیدگاه مکانیکی و هم در دیدگاه متالورژیکی مطرح است.

مرجع اصلی: Metal Forming ; Mechanics & Metallurgy

by Hosford & Caddell

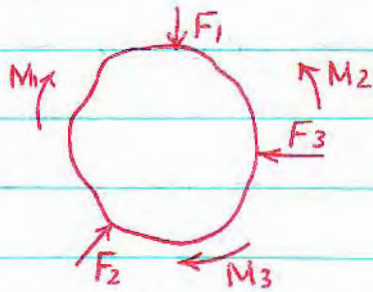


در تحلیل تنش، انتخاب محورهاى مختصات دلخواه است. و عموماً دستگاهى را انتخاب می‌کنیم که



کارمان را ساده‌کننده‌ترین حالت زیر:

واضح است که کار در دستگاه (1) ساده‌تر است.



در درس استاتیک، تعادل نیروها و گشتاورها

را بررسی می‌کنیم.

$$\text{تنش (stress)} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} \quad \left( \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \quad \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \quad \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$$

تعریف تنش مانند فشار است اما تفاوت‌های عمده‌ای با هم دارند.

$$\left. \begin{aligned} 1. \text{ تنش نرمال (عمودی)} &= \frac{\text{نیروی عمود بر سطح}}{\text{سطح}} \\ 2. \text{ تنش برشی (مماس)} &= \frac{\text{نیروی مماس بر سطح}}{\text{سطح}} \end{aligned} \right\} \text{تنش}$$

$$\left. \begin{aligned} 1. \text{ Normal strain} &= \frac{\text{تغییرات ابعادی}}{\text{ابعاد اولیه}} = \text{گرنش} \\ 2. \text{ Shear strain} & \end{aligned} \right\} \text{گرنش}$$

$$\text{Normal strain} = \frac{\text{تغییرات ابعادی در اثر تنش نرمال}}{\text{ابعاد اولیه در همان راستا}}$$

در مورد گرنش برشی یا "Shear strain" تغییر ابعاد در اثر تنش برشی و بعد

اولیه در آن راستا مانند حالت کرنش عمودی نیست.



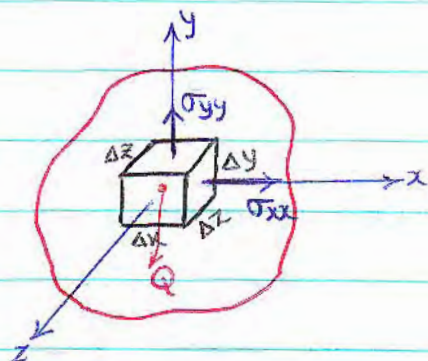
تحت تنش برشی المان مورد نظر از مکعب به متوازی السطوح تبدیل میشود.

$$\gamma: \text{تغییر زاویهی } 90^\circ \quad \tan \gamma \sim \gamma = \frac{\Delta a}{a}$$

$\Delta a$ : تغییرات ابعادی در اثر تنش برشی  $a$ : بعد اولیه

تنش دارای علامت است. در مورد تنش نرمال، در حالت کشش، تنش مثبت و در حالت

فشار تنش منفی بطور قراردادی در نظر گرفته میشود.



$$\sigma_{xx} = \frac{F_{xx}}{\Delta y \cdot \Delta z}$$

$\sigma_{zz}$ : نیروی اندیس اول سطح اثر را معین می کند.

ز یا اندیس دوم جهت نیرو یا تنش را نشان می دهد.

از لحاظ گریسیالوگرافی، جهت صفحه  $\Delta z, \Delta y$ ، محور  $x$  است یعنی بردار عمود بر آن.

$$\sigma_{yy} = \frac{F_{yy}}{\Delta x \cdot \Delta z}$$

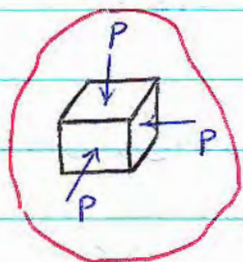
$$\sigma_{zz} = \frac{F_{zz}}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

$\sigma_{zz}, \sigma_{yy}, \sigma_{xx}$  در واقع همان تنش های قائم هستند.



اگر نیروها در همه جهات مساوی باشند مثل قطعه ای زیر آب در نتیجه تنش ها در همه جهات یکسان

است. این حالت تنش را هیدرواستاتیک می نامند. (شبیه به فشار است)



در این مورد هر سه  $P$  ها فشاری اند. در حالت های دیگر

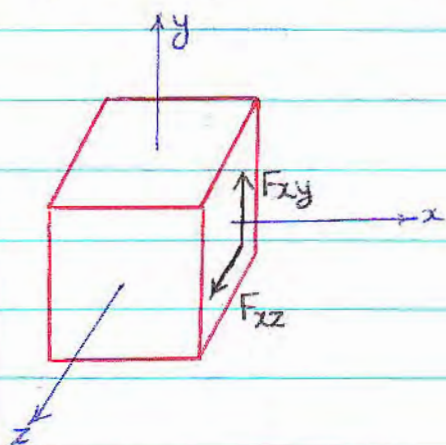
می تواند هر سه کششی باشند.

← فشار یک کمیت اسکالر است در صورتیکه تنش چون جهت دارد اسکالرنسیت می تواند

بردار باشد اما در حالت کلی فراتر از بردار بوده فضایی پیچیده تر از فضای برداری دارد. در حالتیکه

فقط نیروهای عمودی را در نظر بگیریم فضای تنش مثل فضای برداری می شود اما در حالت کلی نیروهای

مماسی وجود دارند.



$$\sigma_{xy} = \frac{F_{xy}}{\Delta y \cdot \Delta z}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{F_{xz}}{\Delta y \cdot \Delta z}$$

در تنش های برشی اندیس اول و دوم با هم فرق می کنند. برای مختصر شدن:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_y$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_z$$

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \tau_{xz}$$

$$\sigma_{zy} = \tau_{zy}$$

بنابر این تنش ها در یک نقطه  $Q$  عبارتند از:

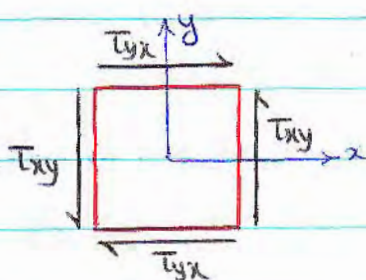
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \text{بردار}$$

این ماتریس برای المان های مختلف مکعبی از نظر جهات دارای مؤلفه های غیر از اینها خواهد بود.

بنابر این بسیاری فشار و حتی بردها نسبت.

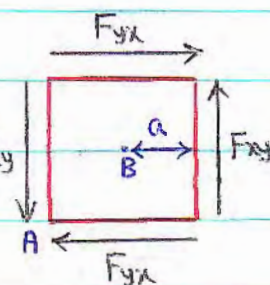
در تحلیل نیروها با مؤلفه های سه گانه سروکار داریم  $\leftarrow$  بردها

در تحلیل تنش با مؤلفه های نه گانه سروکار داریم  $\leftarrow$  تینسور (Tensor)



المان مکعبی:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z \Rightarrow$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{xy} = F_{yx}$$

or

$$\sum M_B = 0 \quad \tau_{xy} \cdot a = +M_z \quad \tau_{yx} \cdot a = -M_z$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \Rightarrow F_{xy} = F_{yx} \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow \tau_{xy} \cdot a = +M_z, \tau_{yx} \cdot a = -M_z \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

از این تعادل زگر شده نتیجه میشود که تنش برشی هم جهت دارد. پس  $\tau_{xy}$  اگر باشد در صفحه  $x$  در

در جهت  $y \leftarrow \tau_{yx}$  هم در صفحه  $y$  در جهت  $x$  وجود دارد هم اندازه با آن اما در جهت

مخالف.



86.7.1 (7)

در شکل صفحه‌ی قبل  $\tau_{xy}$  گشتاوری حول مرکز در جهت پادساعتگرد می‌کنند.

$\tau_{yx}$  گشتاوری حول مرکز در جهت ساعتگرد ایجاد می‌کنند.

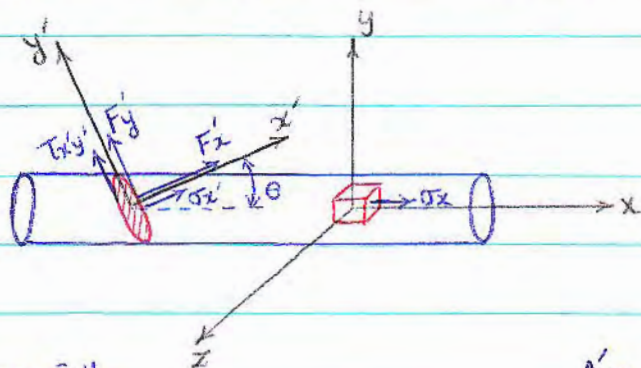
$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

تینور تنش،  $\sigma$  مؤلفه‌ی مستقل دارد.

در تست کشش یک نمونه استوانه‌ای:  $\sigma_x = \frac{F}{A}$ . بقیه‌ی مؤلفه‌های تنش صفر هستند.

86.7.3

در کشش ساده، اگر المان مکعبی در صفحه‌ی  $xy$  با اندازه‌ی  $\theta$  بچرخد:



البته جهت  $F_y$  باید قریه‌شود

$$A' = \frac{A}{\cos \theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x'} = F \cos \theta \\ F_{y'} = F \sin \theta \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

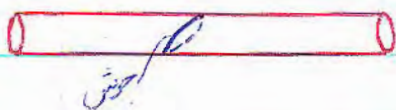
$$\sigma_{x'} = \frac{F_{x'}}{A'} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{F_{y'}}{A'} = \frac{F}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2}$$

در این مورد  $\sigma_x$  راحت بدست می‌آید. ضرایب  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  نسبت بین دو مختصات هستند.

در نتیجه در یک مختصات یک طور تنش می بینیم و در مختصات دیگر، طور دیگر.

**کاربرد:** اگر دو میل را بصورت زیر جوش دهیم، باید تنش را در مختصات مربوط به جوش بدست آوریم.



صفحه‌ی مورب  $A'$  را در نظر می‌گیریم؛

$\lambda_i$  ها،  $\cos$  های هاری هستند.

اگر  $\vec{n}$  نرمال صفحه‌ی  $A'$  باشد،

$\theta$ : زاویه‌ی  $\vec{n}$  با محور  $x$

$\alpha$ : " " " " "  $y$

$\beta$ : " " " " "  $z$

$$\cos \theta = \lambda_x$$

$$\cos \alpha = \lambda_y$$

$$\cos \beta = \lambda_z$$

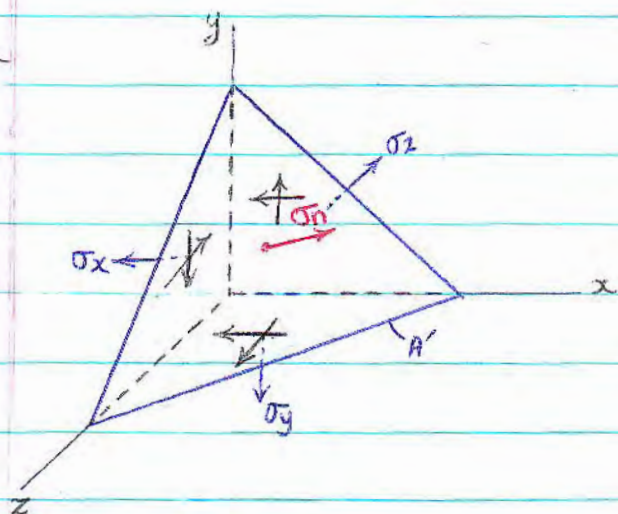
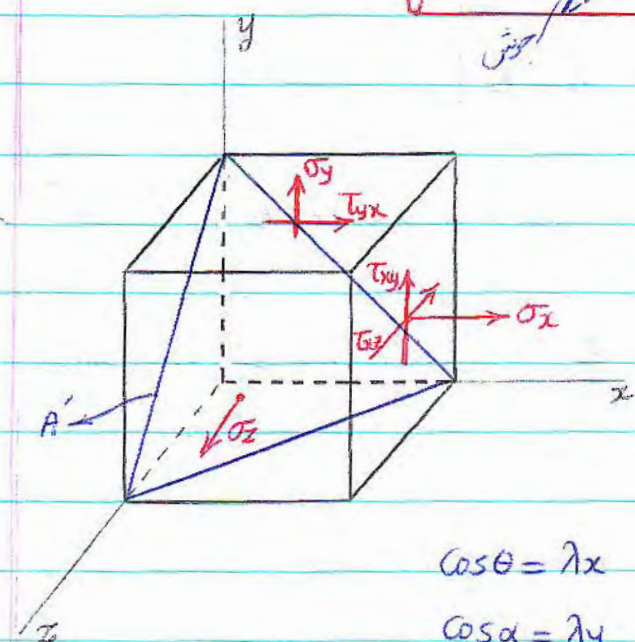
با برداشتن اضافه‌های مکعب،

فرض روی سطح  $A'$  فقط تنش نرمال وجود

داشته باشد؛ روی سه وجه دیگر هم تنش‌های

نرمال و هم تنش‌های برشی وجود دارد.

برای این نکته از مکعب متعادل نیروها را می‌نویسیم:





تصویر مؤلفه نیروی مربوطه در راستای  $n$

$$\sigma_n \cdot A' = (\sigma_x A' \lambda_x) \lambda_x + (\sigma_y A' \lambda_y) \lambda_y + (\sigma_z A' \lambda_z) \lambda_z$$

مؤلفه نیروی مربوطه

$$+ (\tau_{xy} A' \lambda_x) \lambda_y + (\tau_{xz} A' \lambda_x) \lambda_z + (\tau_{yx} A' \lambda_y) \lambda_x$$

نیروی برشی در جهت  $y$

$$+ (\tau_{zx} A' \lambda_z) \lambda_x + (\tau_{yz} A' \lambda_y) \lambda_z + (\tau_{zy} A' \lambda_z) \lambda_y$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{xz} \lambda_x \lambda_z + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z$$

سمت چپ این رابطه یک محضات جدید است با تنش های مربوط به این محضات. سمت راست

تنش های معلوم در محضات اولیه هستند. رابطه محضات جدید با محضات قبلی هم باید معلوم باشد

که همان  $\cos$  های هاری است.

می توانستیم صفحه  $A'$  پیدا کنیم که در آن تنش برشی علاوه بر تنش قائم وجود داشته باشد. اما اثبات

می کنیم که تنها یک صفحه وجود دارد که در آن دیگر تنش برشی وجود ندارد و فقط یک  $\sigma_n$  وجود دارد.

این بار متعادلهای نیروها را در سه راستای  $x$  و  $y$  و  $z$  می نویسیم.

$$\sum F_x = 0 : \sigma_n A' \lambda_x - \sigma_x A' \lambda_x - \tau_{yx} A' \lambda_y - \tau_{zx} A' \lambda_z = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \sigma_n A' \lambda_y - \sigma_y A' \lambda_y - \tau_{xy} A' \lambda_x + \tau_{xz} A' \lambda_z = 0$$

$$\sum F_z = 0 : \sigma_n A' \lambda_z - \sigma_z A' \lambda_z + \tau_{yz} A' \lambda_y - \tau_{xz} A' \lambda_x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_n - \sigma_x) \lambda_x - \tau_{yx} \lambda_y - \tau_{zx} \lambda_z = 0 \\ -\tau_{xy} \lambda_x + (\sigma_n - \sigma_y) \lambda_y + \tau_{zy} \lambda_z = 0 \\ -\tau_{xz} \lambda_x + \tau_{yz} \lambda_y + (\sigma_n - \sigma_z) \lambda_z = 0 \end{cases}$$

فرض بر این بود که در صفحه‌ی  $A'$  تنش برشی وجود ندارد.

برای حل این سه معادله سه مجهول باید در میان ماتریس ضرایب راساوی صفر قرار دهیم:

$$\Rightarrow \sigma_n^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma_n^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z) \sigma_n - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0$$

داخل پرانتز اعداد معلومی هستند.

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

$I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  نامتغیر هستند.

این معادله فقط سه جواب دارد. بین کلیه‌ی مقادیر  $\lambda_x$ ،  $\lambda_y$  و  $\lambda_z$  (در هر دستگاهی)

فقط یک دسته جواب سه تایی وجود دارد که در آن فقط تنش‌های قائم وجود دارد و تنش‌های

برشی وجود ندارد. این مختصات را مختصات اصلی می‌گویند. در هر حالت تنش یک مختصات



اصلی وجود دارد.

تذکره در معادله‌ی فوق جملات  $\lambda_x$ ،  $\lambda_y$  و  $\lambda_z$  وجود نداشت یعنی مستقل از جهت است.

چون  $I_1$  نامتغیر است: 
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z$$

در یک حالت تنش دستگاه مختصات را هرگونه تغییر دهیم،  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  تغییر می‌کند اما بحری که جمع آن‌ها ثابت است.

$\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$ : تنش‌های اصلی 
$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

چون  $I_2$  نامتغیر است:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z &= \tau_{xy'}^2 + \tau_{xz'}^2 + \tau_{yz'}^2 \\ &- \sigma'_x \sigma'_y - \sigma'_x \sigma'_z - \sigma'_y \sigma'_z \end{aligned}$$

$I_2$  در مختصات اصلی عبارتست از:

$$I_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

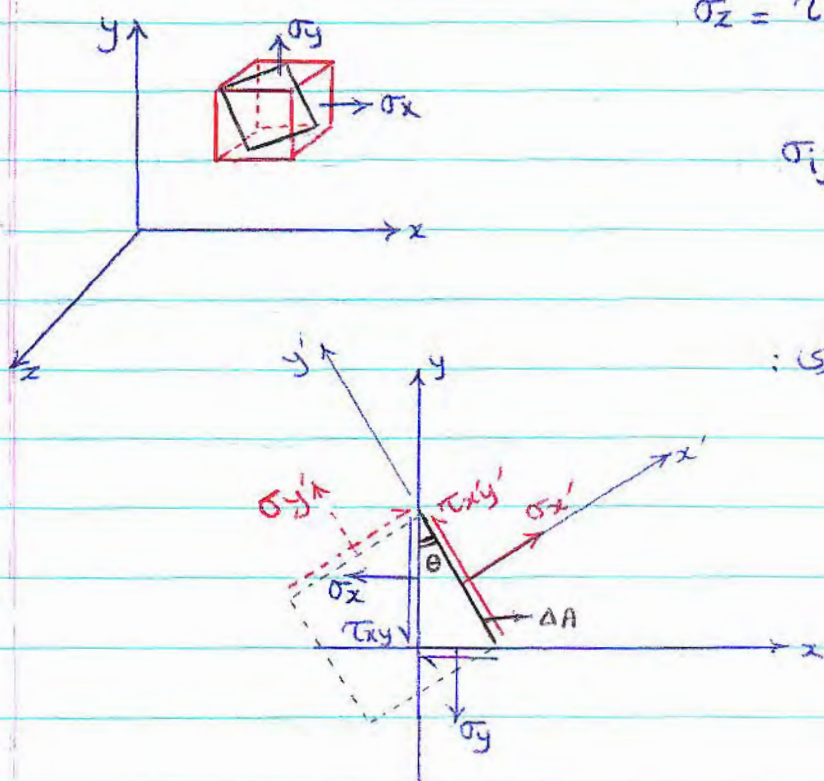
در ادامه بحث تبدیل مختصات تنش: می خواهیم یک حالت خاص را بررسی کنیم که در بسیاری از

فرایندهای شکل دادن وجود دارد. این حالت تنش صفحه ای است یا plane stress که

بر آن:  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همین حالت بصورت دوبجری:



$$\sum F_{x'} = 0: \sigma_{x'} \Delta A - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta$$

$$- (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0: \tau_{x'y'} \Delta A + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta$$

$$- (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x' = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

برای بدست آوردن  $\sigma_y'$  از رابطه  $\sigma_x'$  استفاده کرده اما بجای  $\theta$  از  $\frac{\pi}{2} + \theta$  استفاده میکنیم:

$$\sigma_y' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$* \left(\sigma_x' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

$$+ \tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \cos 2\theta + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

$$- \tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \cos 2\theta = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

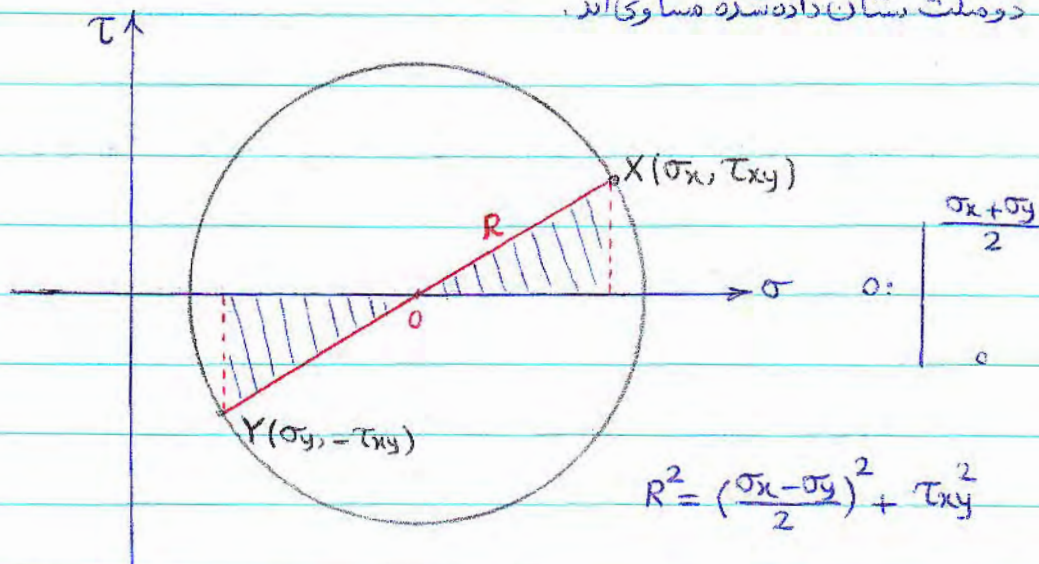
$$\Rightarrow (X - b)^2 + Y^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

$X, Y$  : مختصات جدید

معادله فوق معادله یک دایره است به شعاع  $R$  و مرکز  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  و  $\tau = 0$

در دستگاه  $(\tau, \sigma)$

دو مثلث نشان داده شده مساوی اند.



کلیدی نقاط روی محیط را بره (کلیدی نقطه‌ها) مکان هندسی تمام مختصات های جدید است.



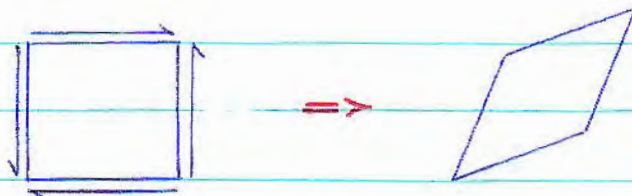
Torsion

بجش

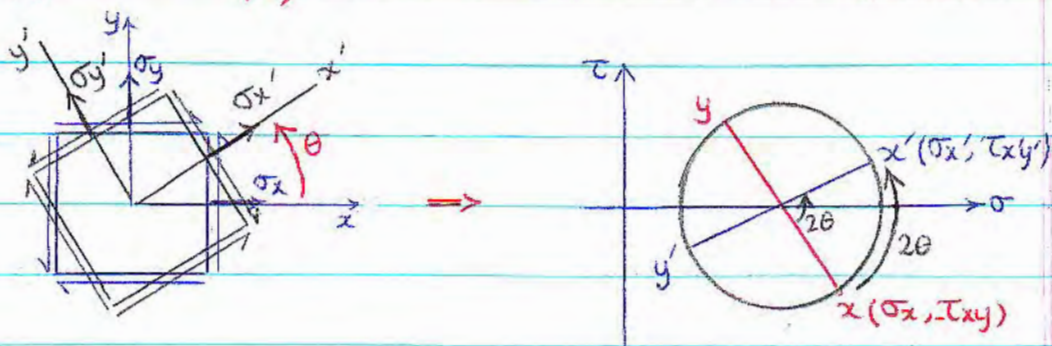
علامت گذاری تنش برشی :

اگر بخواد سطح را در جهت ساعتگرد بچرخاند، مثبت است.

اگر بخواد سطح را در جهت پادساعتگرد بچرخاند، منفی است.







روی دایره‌ی مور نسبت به واقعیت زوایا دو برابر هستند اما جهت چرخش یکسان است. یعنی اگر

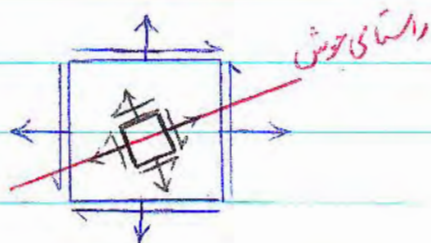
المان  $\theta$  درجه بچرخد، روی دایره‌ی مور  $2\theta$  می‌چرخد. در نتیجه یک مختصات  $\sigma$  که دوبار

$90^\circ$  درجه دارد در دایره‌ی مور بصورت یک خط یعنی  $180^\circ$  درمی‌آید.

دورق‌های فیزیکی وقتی تحت پرس قرار می‌گیرند یک حالت تنش صفحه‌ای ایجاد میکنند چون در جهت عمود

دورق، تنش صفر است.

از کاربردهای دایره مور: وقتی دورق را به هم جوش می‌دهیم باید تنش‌ها در مختصات جدید (جوش) بدست

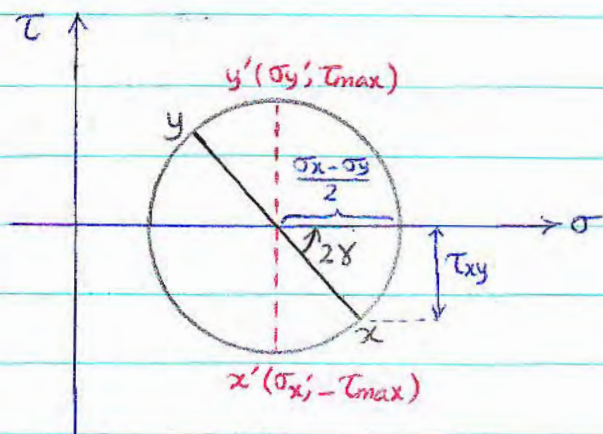


آورد.

در دایره‌ی مور دو نقطه داریم که قطر دایره از آن دو گذشته و مولاری با محور  $\sigma$  است. در این دو نقطه  $\tau = 0$

بوده و  $\sigma$  در این دو یا  $\max$  است و یا  $\min$ . این مختصات، مختصات اصلی است.

زاوی بی مختصات اصلی و مختصات اولیه است:



پس در دایره ی مور،  $2\delta$  است.

$$\tan 2\delta = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \text{Arc tan } \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

حالت دیگر تنش که در دایره ی مور نشان داده شده است،  $x'y'$  است. در این حالت

تنش برشی max است. نسبت به مختصات اصلی  $45^\circ$  در واقعیت و  $90^\circ$  در دایره ی مور

پرخیده است.

کاربرد: در تغییر شکل پلاستیک

در سیستم های لغزش، سیستمی زودتر فعال می شود که  $\tau$  آن زودتر به

مقدار بحرانی برسد ( $\tau_{max}$ ) بنابراین می توانیم پیش بینی کنیم کدام سیستم

زودتر فعال می شود. هم چنین تنش برشی موجب حرکت نابجائی های شود

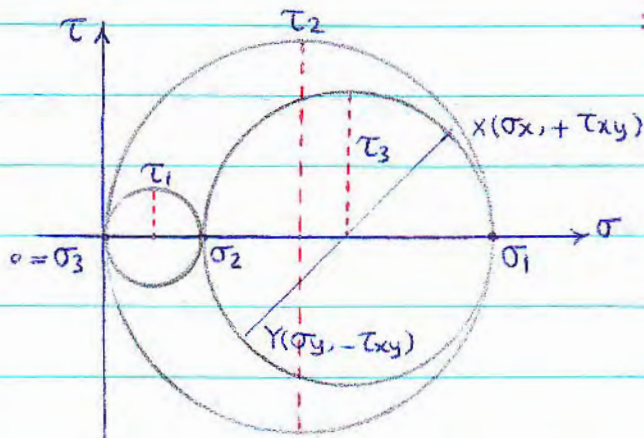
نه تنش فشاری یا کششی



86.7.15

(17)

دایره مور در حالت سه بعدی :



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

در حالت دوبعدی یا plane stress یا  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  داریم :

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_y$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma^2 - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \sigma = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = \sigma_z = 0 \quad , \quad \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma - (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0$$

در صفحه ۱ و ۳ اگر  $45^\circ$  بچرخیم به  $\tau_{max}$  می‌رسیم.

در نتیجه سه دایره، سه جهت اصلی و سه تنش اصلی داریم.

$$\tau_3 = \tau_{\max} - \text{in plane (1,2)}$$

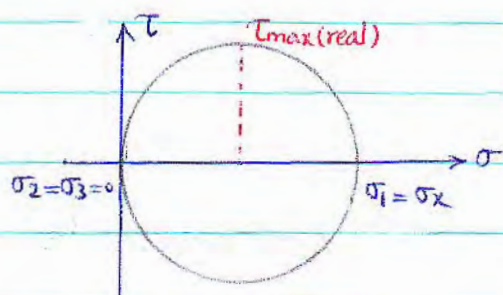
$$\tau_2 = \tau_{\max} - \text{in plane (1,3)}$$

$$\tau_1 = \tau_{\max} - \text{in plane (2,3)}$$

$\tau_{\max}$  واقعی که موجب می شود سیستم لغزشی فعال شده و آبجای هاروی آن حرکت کنند بزرگترین

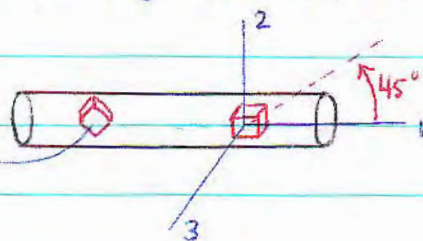
این سه تناسبت. در اینجا یعنی:  $\tau_2 = \tau_{\max} (\text{real})$

\* آزمایش کشش ساده تک محوری:



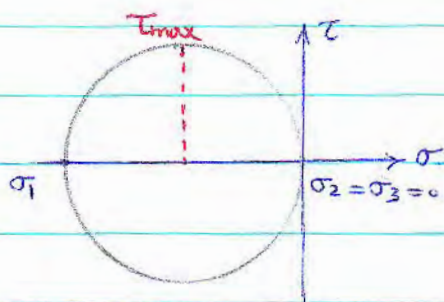
$$\sigma_x = \sigma_1$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



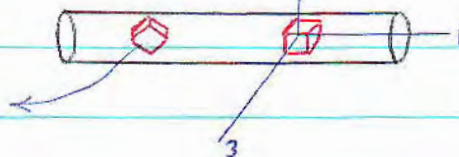
جهت بازشدگی المان در جهت کشش است.  
علامت تنش برشی هم است.

\* آزمایش فشار ساده تک محوری:



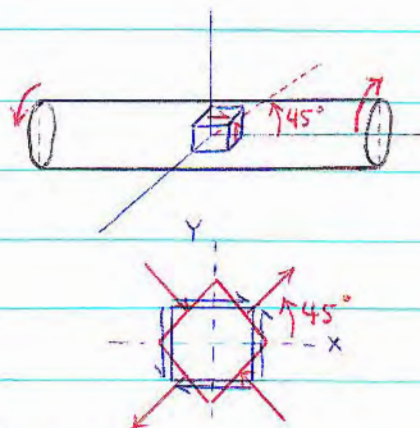
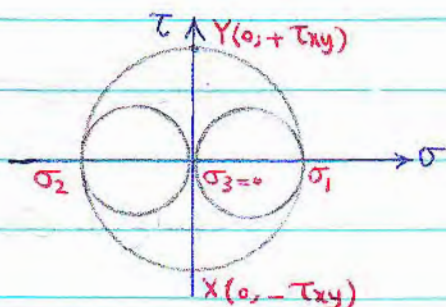
$$\sigma_x = \sigma_1 (-)$$

(بنیادهای مولفه ها = 0)





\* آزمایش پیچش ساده: (Torsion) یا برش خالص



$$\tau_{xy} = \frac{T \rho}{J} \quad \text{چون المان روی سطح است.}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

نقطه  $Y(\sigma_3 + \tau_{xy})$  معروف  $T_{max-real}$  است پس قطع روی این سطح می شکند

جهت تنش ها در این مورد خیلی مهم است.

اگر  $\frac{\pi}{4}$  درجهت پارامتر بچرخیم به مختصات اصلی می رسم.

در همین مورد: در هنگام برش اگر  $45^\circ$  بچرخیم بدلیل تغییر المان مربعی به لوزی، درجهت

1 کشش داریم  $(\sigma_1 > 0)$  و درجهت 2 فشار  $(\sigma_2 < 0)$ .

در مورد اجسام نرم (ductile): اگر تحت کشش قرار گیرند در  $45^\circ$  واگر تحت پیچش



Tension



Torsion

قرار گیرند بصورت تحت می شکند.

برای مواد ترد (brittle) برعکس است.

**گرش:**

گرش دینوع است:

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{1- مهندسی} \quad \epsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad \text{2- حقیقی}$$

$$\epsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \left( \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} \right) = \ln (1 + e) \Rightarrow \epsilon = \ln (1 + e)$$

گرش مهندسی در واقع وجود ندارد و تقریبی است برای گرش حقیقی. در روابط ریاضی با گرش

حقیقی کار داریم نه مهندسی. البته در گرش های کوچک  $e \approx \epsilon$ .

آزمایش کشش ساده را در چند مرحله انجام می دهیم:

$$e_1 = 0.2 \quad \epsilon_1 = \ln \frac{12}{10} = 0.181 \quad \text{1) کشش از طول 10 به 12}$$

$$e_2 = \frac{3}{12} = 0.25 \quad \epsilon_2 = \ln \frac{15}{12} = 0.22 \quad \text{2) " " " 12 به 15}$$

$$e_3 = \frac{5}{15} = 0.33 \quad \epsilon_3 = \ln \frac{20}{15} = 0.29 \quad \text{3) " " " 15 به 20}$$

$$e_T = \frac{10}{10} = 1 \quad \epsilon_T = \ln \frac{20}{10} = 0.69 \quad \text{کلی: " " " 10 به 20}$$

**نتیجه:** گرش حقیقی خاصیت جمع پذیری دارد برخلاف گرش مهندسی.



یک المان مکعب مستطیل با ابعاد  $L_0$ ،  $W_0$  و  $t_0$  در نظر می‌گیریم. با اعمال تنش و تغییر ابعادی

به ابعاد  $L$ ،  $W$  و  $t$  می‌رسیم:

$$V_0 = L_0 W_0 t_0$$

$$V = L W t$$

$$\ln \frac{V}{V_0} = \ln \frac{L W t}{L_0 W_0 t_0} = \ln \frac{L}{L_0} + \ln \frac{W}{W_0} + \ln \frac{t}{t_0} = \epsilon_L + \epsilon_W + \epsilon_t$$

$$\Rightarrow \ln \frac{V}{V_0} = \epsilon_L + \epsilon_W + \epsilon_t \quad \text{کرنش حجمی:}$$

\* در تغییر شکل پلاستیک  $\Delta V = 0$  (علت؟)

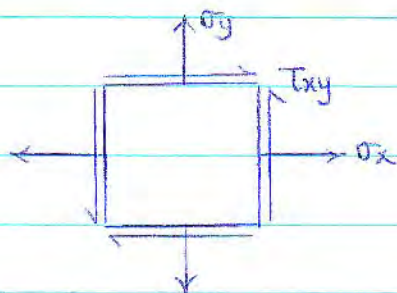
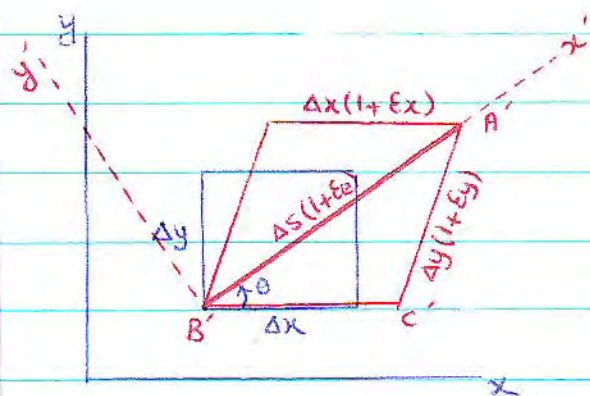
$$V = V_0 \Rightarrow \epsilon_t + \epsilon_L + \epsilon_W = 0$$

\* در تغییر شکل پلاستیک، ناهمبازی‌ها حرکت کرده تا به سطح برسند و تغییر حجم کلی صفر است

86.7.17

تبدیل مختصات کرنش:

حالت خاص: (کرنش صفحه) plane strain



$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2 - 2\overline{B'C'} \cdot \overline{A'C'} \cdot \cos \widehat{A'C'B'}$$

$$\Rightarrow \Delta S^2 (1 + \epsilon_\theta)^2 = \Delta x (1 + \epsilon_x)^2 + \Delta y (1 + \epsilon_y)^2 - 2\Delta x (1 + \epsilon_x) \cdot \Delta y (1 + \epsilon_y) \cdot \cos(\pi/2 + \gamma_{xy})$$

$$\Delta S \cdot \cos \theta = \Delta x$$

$$\Delta S \cdot \sin \theta = \Delta y$$

حاصل ضرب دو کرنش در هم، مساوی صفر در نظر بگیریم؟ چون کرنش‌ها مقادیر کوچکی هستند.

$$\Rightarrow (1 + \epsilon_\theta)^2 = 1 + 2\epsilon_\theta = (1 + 2\epsilon_x) \cos^2 \theta + (1 + 2\epsilon_y) \sin^2 \theta + 2(1 + \epsilon_x + \epsilon_y) \gamma_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \epsilon_{x'} = \epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

همانند رابطه تنش است، فقط درجه سوم نیست راست، ضرب 2 وجود ندارد.

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \epsilon_\theta = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_{x'} \Rightarrow \epsilon_{y'} = \epsilon_{x'} \Big|_{\theta \rightarrow \theta + \pi/2}$$

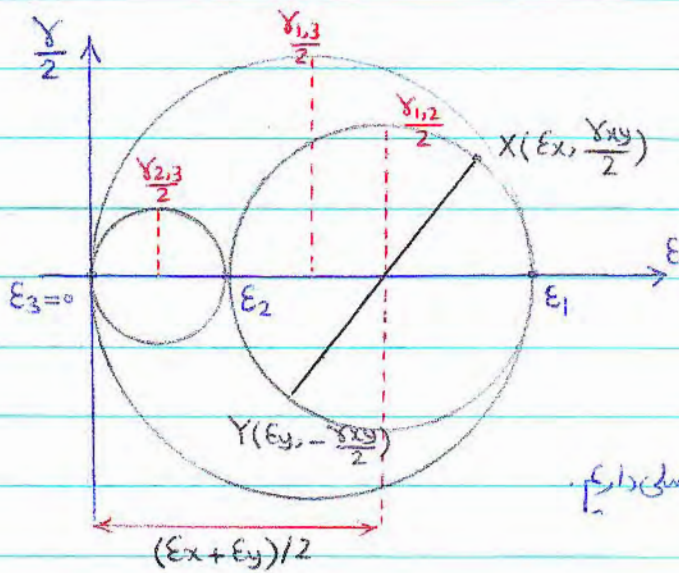
$$\Rightarrow \epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \underbrace{\cos(2\theta + \pi)}_{-\cos 2\theta} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \underbrace{\sin(2\theta + \pi)}_{-\sin 2\theta}$$



$$\epsilon_{45} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}}{2} \Rightarrow \gamma_{xy} = 2\epsilon_{45} - (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\Rightarrow \gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \left(\epsilon_{x'} - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2$$



قوانین دایره مور کرنش مثل دایره مور

کرنش است.

اگر  $\gamma_{xy} > 0 \iff \tau_{xy} > 0$

نکته: فقط یک مختصات یا صفحات اصلی داریم.

اگر صفحات اصلی برای کرنش ها بدست آمد، همان

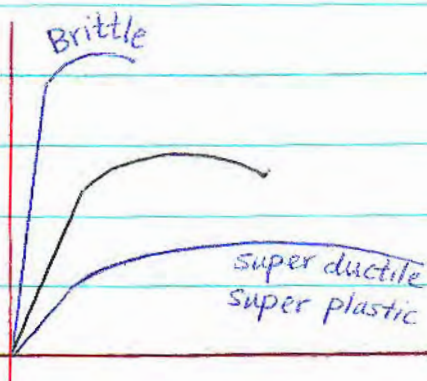
صفحات: صفحات اصلی برای کرنش ها نیز هستند.

در تغییر شکل پلاستیک:  $\Delta V = 0$  - جمع پذیری کرنش های حقیقی

در تغییر شکل الاستیک:  $\Delta V \neq 0$  - جمع پذیری کرنش های حقیقی

روابط کرنش و کرنش:

قانون هooke:  $\sigma_x = E \epsilon_x$  ;  $E$ : مدول الاستیک - مدول یانگ



درکشش ساده در جهت  $x$ ؛ قانون هooke:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

بالینکه درجهت  $y$  و  $z$ ، تنش صفر است اما کرنش

در این جهات وجود دارد و درواقع عکس العمل های  $\epsilon_x$  است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0 \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

درکشش ساده:

پس نمی توان گفت هرگاه تنش صفحه ای

داشتیم، متناظر با آن کرنش صفحه ای نیز داریم.

$$\begin{aligned} \text{در حالت کلی: } \epsilon_x &= \left( \frac{\sigma_x}{E} \right) - \nu \left( \frac{\sigma_y}{E} \right) - \nu \left( \frac{\sigma_z}{E} \right) \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &\quad \epsilon_y \quad \quad \epsilon_z \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \end{aligned}$$

درکشش های کوچک، کرنش های برشی مستقل از کرنش های نرمال است اما درکشش های زیاد یا

large strain، روابط هooke تخم می یابند و کرنش و نرمال دیگر مستقل از هم نیستند.

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$G$ : مدول برشی

در مورد کرنش های برشی، حتی نسبت به هم نیز مستقل اند و  $\gamma_{xz}$  ربطی به  $\gamma_{xy}$  ندارد. یعنی تغییر



زاویه قائمه در دو صفحه مستقل از هم است.

فرض مهم در اینجا این است که ماده ایزوتروپ است در حالیکه واقعیت اینطور نیست. مثلاً ضرب

پواسون در راستای مخالف فرق می‌کند.

توانست ماده:

$$K - \nu - G - E$$

$$\text{پلاستیک: } \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0 \quad \text{الاستیک: } \frac{dv}{v} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{I_1} \end{aligned}$$

$$\text{تشنه در راستای} \quad \text{تشنه نرمال متوسط} = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \sigma_m$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{\left(\frac{dv}{v}\right)} = \frac{E}{3(1-2\nu)} = k$$

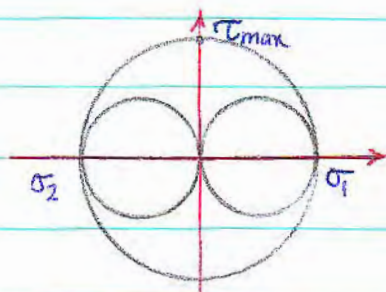
K: مدول الاستیک حجمی

86.7.22

K در پلاستیک وجود ندارد.

E، G و ... می‌تواند در شرایط پلاستیک هم به شکل دیگر وجود داشته باشند.

پیچش یا Torsion را بررسی می‌کنیم.

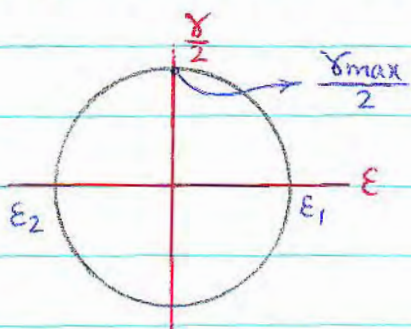


$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max}$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_1(1+\nu)}{E}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{-\sigma_1(1+\nu)}{E} \Rightarrow \epsilon_1 = -\epsilon_2$$

چون در شرایط الاستیک  $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$  است، در حالت بالا،  $\epsilon_3$  در مرکز مختصات قرار می‌گیرد



یعنی  $\epsilon_3 = 0$

$$G = \frac{\tau_{max}}{\gamma_{max}}$$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{\gamma_{max}}{2}$$

$$G = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_1} = \sigma_1 / \left( \frac{2\sigma_1(1+\nu)}{E} \right) \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

اگر از 4 ثابت  $G, E, K$  و  $\nu$ ، دو تا را داشته باشیم، 2 تای دیگر بدست می‌آید.

در دستگاه کشش برای اندازه‌گیری تغییر طول Gage length از Extensometer

استفاده می‌شود. [رآن پیر الکتریک وجود دارد ← تغییر ایجاد رانده پالس الکتریکی تبدیل می‌کند]

راه دیگر اندازه‌گیری  $E$  : سرعت انتشار صوت (موج) در فلز :  $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



تسلیم (Yielding) :

می‌خواهم شرایط تسلیم را بررسی کنم.

شرایط و فرضیات تحلیل تغییر شکل پلاستیک :

1- ماده ایزوتروپ است.

2- اثر Bauschinger صرف نظر می‌شود. یعنی عکس العمل ماده در فشار و کشش یکسان

فرض میشود.

3- ثابت بودن حجم در تغییر شکل پلاستیک  $(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0)$

4- تنش هیدرواستاتیک در تغییر شکل پلاستیک تاثیری ندارد.



$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

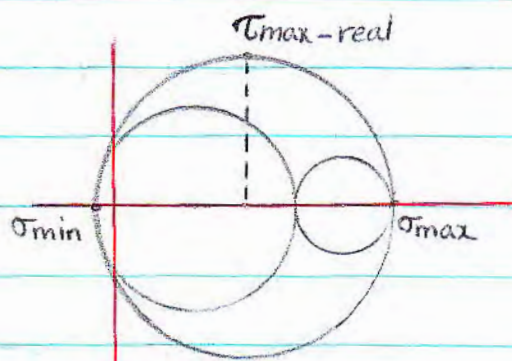
دایره کاپور در این حالت، فقط یک نقطه خواهد بود. در نتیجه تنش برشی صفر خواهد بود؛ بنابراین

تابجانی‌ها حرکت نمی‌کنند ← تغییر شکل پلاستیک ندارم.

{ حرکت تابجانی‌ها دلیل تنش برشی است }

## معیار تسلیم ترسکا:

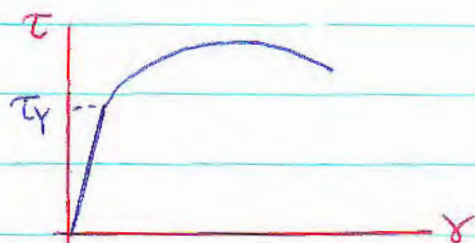
ترسکا فرض کرد، شروع تغییر شکل پلاستیک با  $\tau_{max-real}$  است. یعنی ماده زمانی تسلیم می شود



$$\tau_{max} \gg \tau_y \quad \text{که:}$$

$\tau_y$ : استحکام برشی ماده

در پیچش:



$$\tau \leftarrow T \quad \Phi: \text{تغییر زاویه}$$

$$\gamma \leftarrow \Phi$$

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \gg \tau_y \Rightarrow \sigma_{max} - \sigma_{min} \gg 2\tau_y \quad \text{فرم دیگر معیار ترسکا:}$$

تست کردن معیار با افزایش معلوم کشش ساده نگه محوری:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{yield} = \sigma_y \\ \sigma_{min} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_y - 0 = 2\tau_y$$

در واقع چون معیار ترسکا برای حالت ۲ مؤلفه ای تنش در نظر گرفته شده است، این حالت

ساده را نیز می پوشاند. پس اگر معیار ترسکا صادق باشد:  $\sigma_y = 2\tau_y$



یعنی استحکام کششی دوبرابر استحکام برشی است. پس معیار تسلیم ترسکا بصورت زیر می شود:

$$(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \geq \sigma_Y$$

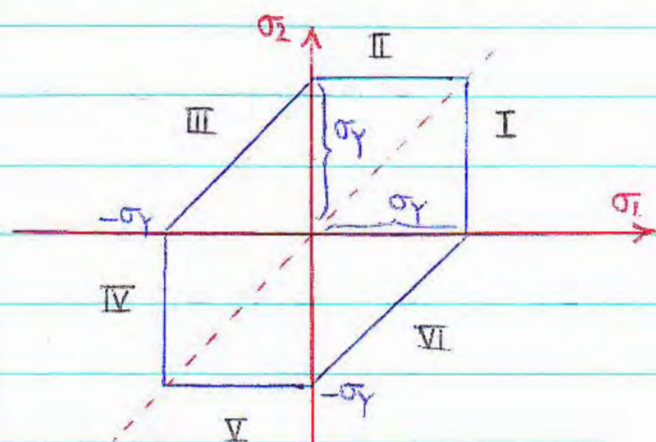
$\sigma_Y$ : استحکام تسلیم در حالت تک محوری که بصورت تجربی از آزمایش کشش بدست می آید.

$\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  هم از طریق تئوری (دایره مور) بدست می آید.

در معیار ترسکا این مطلب مهم در نظر گرفته نشده است:

در تغییر شکل پلاستیک ممکن است چند سیستم لغزش نا هم فعال شوند.

تحقیق معیار تسلیم ترسکا در شرایط تنش صفحه ای مثل تغییر شکل ورق ( $\sigma_3 = 0$ ):



$$\text{I} \begin{cases} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 > 0 : \sigma_1 - 0 = \sigma_Y \\ \sigma_1 > \sigma_2 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \sigma_2 > \sigma_1 > 0 \\ \sigma_3 = 0 \\ \sigma_2 - 0 = \sigma_Y \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} \sigma_2 > 0 \\ \sigma_1 < 0 : \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_Y \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{IV} \begin{cases} \sigma_1 < \sigma_2 < 0 \\ \sigma_3 = 0 \\ 0 - \sigma_1 = \sigma_Y \end{cases}$$

$$\text{V} \begin{cases} \sigma_2 < \sigma_1 < 0 \\ \sigma_3 = 0 \\ 0 - \sigma_2 = \sigma_Y \end{cases}$$

$$\text{VI} \begin{cases} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 < 0 \\ \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_Y \end{cases}$$

پس داخل این شش ضلعی، ماده تسلیم نشده است.

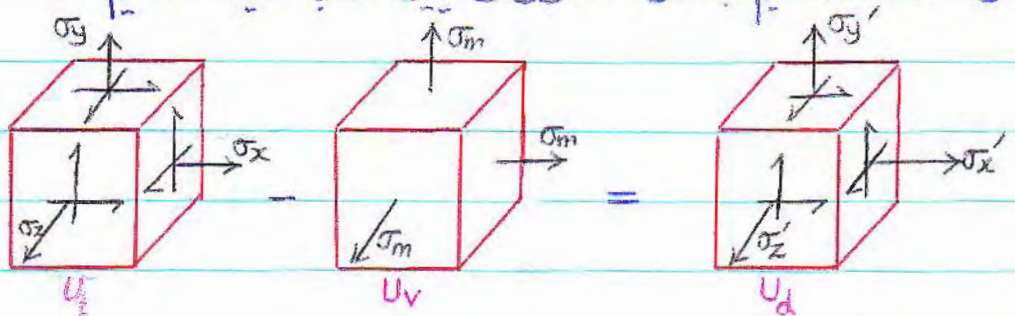
در نمودار  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ،  $\sigma_y$  هم اندازه‌ی  $\sigma_y - \sigma_y$  است. یعنی صرف نظر از اثر باوشینگ.

86. 7. 24

معیار فون میز:

اگر تنش‌های هیدرواستاتیک را که در تغییر شکل پلاستیک تأثیری ندارند از حالت کلی 6

مؤلفه‌ای کم کنیم به تنش‌های مؤثر در تغییر شکل پلاستیک می‌رسیم:



$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

U: انرژی - در ادامه بحث می‌شود

$$\left\{ \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \overbrace{\sigma_x - \sigma_m}^{\sigma'_x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \right\}$$

تنش‌های کوچک شده (انحرافی) Deviatoric stress



$$\sigma'^3 - J_1 \sigma'^2 - J_2 \sigma' - J_3 = 0$$

$$J_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_m) = 0 \Rightarrow J_1 = 0$$

$$J_2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{xz}^2 = K^2$$

$J_2$  مثبت است و برای اینکه معادله فوق سه جواب حقیقی داشته باشد باید همیشه مثبت باشد.

\* تست معیار فون میز با آزمایش تک محوری ساده:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_{yield} \quad \text{تنش تسلیم در بارگذاری محوری ساده:}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma_x^2 = K^2 = 2\sigma_y^2 \Rightarrow k = \sqrt{2} \sigma_y$$

$$\Rightarrow (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2 = 2\sigma_y^2$$

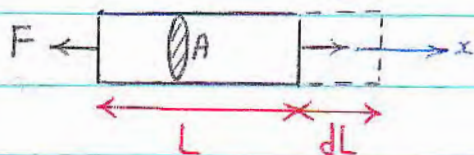
مثل معیار ترسکا، سمت راست معادله از آزمایش کشش و سمت چپ معادله از معاینه

شدت می آید.

$$\xrightarrow[\text{شرط تسلیم}]{\text{شرط}} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2 \geq 2\sigma_y^2$$

پس اگر سمت چپ کوچکتر شد، یعنی ماده هنوز تسلیم نشده است.

انرژی کرنشی الاستیک :



در اثر نیروی  $F_x$  ، جسم بانداژی  $dL$

$$dW = F_x dL$$

جایجا (تغییر طول داده است)

$$dw = \frac{dW}{V} = \frac{F_x dL}{A \cdot L} = \left( \frac{F_x}{A} \right) \left( \frac{dL}{L} \right) = \sigma_x \cdot d\epsilon_x$$

$$\Rightarrow w = \int dw = \int \sigma_x \cdot d\epsilon_x = \int E \cdot \epsilon_x d\epsilon_x = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \epsilon_x$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}]$$

$U$  : انرژی کرنشی الاستیک بر واحد حجم

$$U_t = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_x}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{\sigma_y}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{\sigma_z}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \right. \\ \left. + \frac{\tau_{xy}^2}{G} + \frac{\tau_{xz}^2}{G} + \frac{\tau_{yz}^2}{G} \right\}$$

$$= \frac{1}{2E} \{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \} + \frac{1}{2G} \{ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \}$$

$$= \frac{1}{2E} \{ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2\sigma_x \sigma_y - 2\sigma_x \sigma_z - 2\sigma_y \sigma_z - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \} + \frac{1}{2G} \{ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \}$$



$$\Rightarrow U_t = \frac{1}{2E} \left\{ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \right\} + Q$$

برای تسلیم شدن، انرژی کرنشی الاستیک باید به حدی برسد. یعنی اگر انرژی از یک حدی

گذشت و بیشتر شد، ماده تسلیم خواهد شد. می‌خواهیم این حد را بدست آوریم.

$U_d$ : انرژی ناشی از اعوجاج (distorsion)

$$U_v = U_t \Big|_{\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_m} = \frac{1}{2E} \left\{ 9\sigma_m^2 - 2(1+\nu)(3\sigma_m^2) \right\} + \cancel{Q} \quad \tau_{ij} = 0$$

$$= \frac{3\sigma_m^2}{2E} \left\{ 3 - 2(1+\nu) \right\} = \frac{3\sigma_m^2}{2E} (1-2\nu)$$

$$\Rightarrow U_d = U_t - U_v = \frac{1}{2E} \left\{ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \right. \\ \left. - 3 \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)^2 (1-2\nu) \right\} + Q$$

$$\Rightarrow U_d = \frac{1}{2E} \left\{ \frac{2}{3}(1+\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \right\} \\ + Q$$

$$= \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + Q$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow U_d = \frac{1}{12G} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2 \right\}$$

این انرژی باید بزرگ حری مقایسه شود که اگر از آن بزرگ تر شد ، ماده تسلیم شود .

اگر آزمایش کشش انجام شود :

$$U_{d/y} = \frac{1}{12G} [\sigma_y^2 + \sigma_y^2] = \frac{1}{12G} (2\sigma_y^2)$$

شرایط تسلیم  $\Rightarrow \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2\} \geq 2\sigma_y^2$

$\sigma_y$  : تنش تسلیم و کشش ساده ی تک محوری .

این رابطه همان معیار تون میز است . حالت مساوی ، آستانه تسلیم است .

برای حالت تنش صفحه ای :

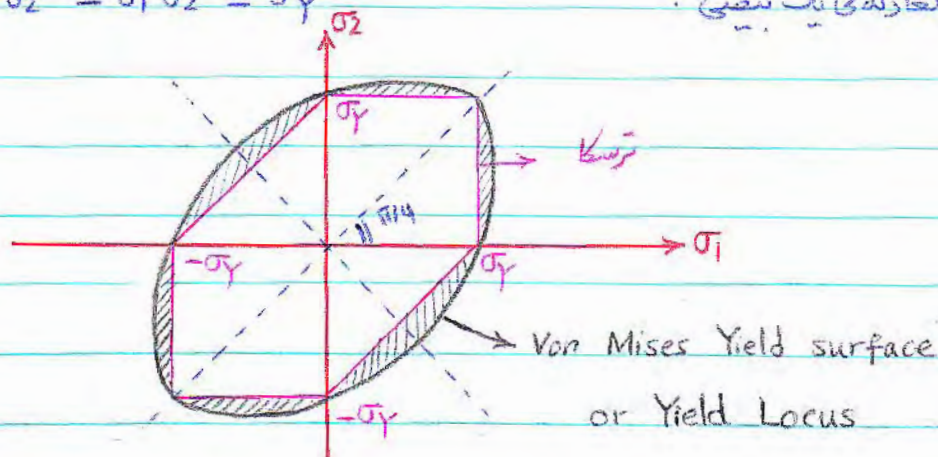
$$\sigma_x = \sigma_1 \quad , \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad , \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 2\sigma_y^2$$

آستانه تسلیم :

$$\Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_y^2$$

معادله ی یک بیضی :





اگر شرایط تنش خوری باشد که حالت تنش داخل بیضی قرار بگیرد، ماده طبق معیار فون میز تسلیم

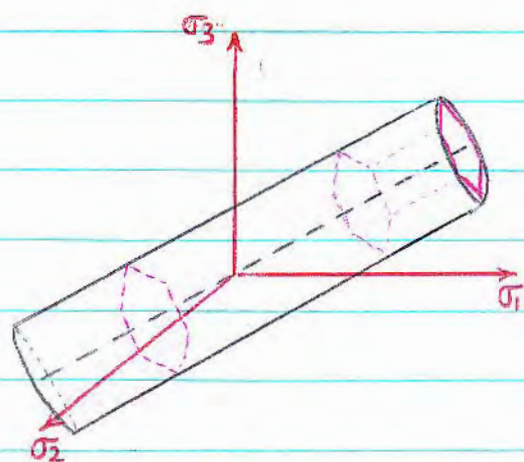
نشده است. مثلاً در پیرین یک ورق، باید تنش خوری همه جا وارد شود که تغییر شکل پلاستیک بدهد

نه الاستیک چون در غیر اینصورت ورق پری گردد.

اگر تنش خیلی زیاد باشد یعنی از بیضی دور شویم، موجب پارگی ورق می شود.

در حالت سه بعدی معیار فون میز تر تمسک

بصورت مقابل خواهد شد.



تمسک: منشور تنش ضلعی منتظم مطابق

استوانه‌ی فون میز

محور منشور و استوانه، با هر سه محور  $x$ ،  $y$  و  $z$  زاویه‌ی مساوی می سازد

تفاوت مهم این دو معیار: فون میز دقیق‌تر و علمی‌تر است. این دو در قسمت‌های هاشور خورده

با هم اختلاف دارند. معیار تمسک خیلی بوده و کار کردن با آن راحت‌تر است. در شکل دادن فلزات

حالت تنش معمولاً بیرون بیضی است و پیش‌بینی هر دو معیار درست است. (تنش بزرگ)

در نقاط تقاطع، این دو معیار یکی است:  $\sigma_1 = \sigma_2$  { تنش در محوری متقارن }

Equivalent (Effective) stress:

تنش مؤثر (معادل):

$$\sigma_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2]^{1/2}$$

$\sigma$  or  $\sigma_e$

آسانتر تسلیم

$\sigma$  یا  $\sigma_e$  یک تنش نماینده است که مطابق با معیار نون میز با  $\sigma_y$  مقایسه می شود.

پس در هر حالت تنش یک پارامتر واحد تعریف کرده و این معادل است با تنش 9 مؤلفه ای.

برای کرنش هم کرنش معادل داریم که نیاز به مقدمه دارد.

در عبارت ترسکا:  $\sigma_y = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \equiv \sigma_e \text{ or } \sigma$

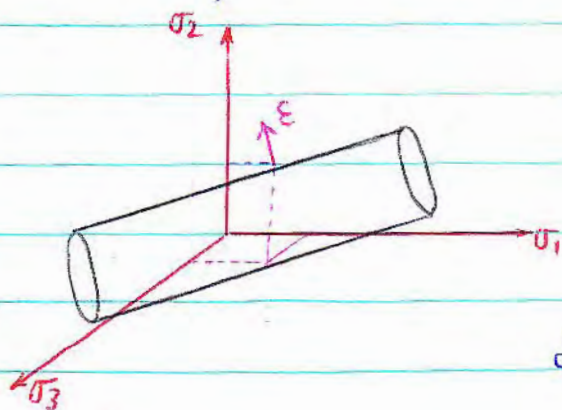
$\sigma$  یا  $\sigma_e$ ، شعاع بزرگترین دایره است.

روابط تنش و کرنش در شرایط پلاستیک:

اصل تعامل (Normality Rule): بردار کرنش بر سطح تنش عمود است.

در هر نقطه از این سطح بردار کرنش عمود بر

سطح وجود دارد.



$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$



علت:  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$  بردار عمود بر سطح

$f$ : تابع سطح در فضای سه بعدی

مطابق با اصل تجماع، بردار گرانش را راستای  $\nabla f$  است. فقط یک ضریب تناسب دارد:

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$d\epsilon_1 = d\lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \quad ; \quad d\epsilon_2 = d\lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \quad ; \quad d\epsilon_3 = d\lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}$$

چون سطح فوق از معیار فون میز بدست آمده و  $\sigma_Y$  ثابت است:

$$f(\sigma) = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] = 2\sigma_Y^2$$

(نقش اصلی را بررسی می کنیم)

روابط Levi-Mises:

$$d\epsilon_1 = d\lambda' \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 4d\lambda' \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] = d\lambda \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]$$

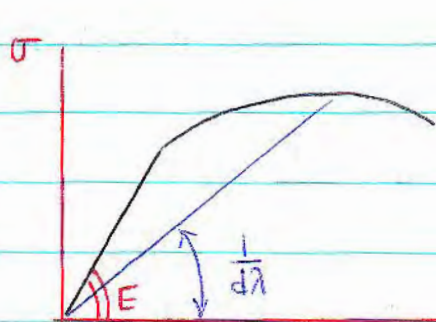
$$d\epsilon_2 = d\lambda \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \quad d\epsilon_3 = d\lambda \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]$$

مقایسه با حالت الاستیک:  $d\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

پس حد نهائی  $\nu$ ،  $\frac{1}{2}$  است. در حالت پلاستیک به آن ای رسم  $(\nu = \frac{1}{2})$

هم چنین:  $\frac{dV}{V} = (1 - 2\nu) \dots$  پس در پلاستیک،  $\Delta V = 0$  است.



از لحاظ ابعادی  $d\lambda$  واحد  $\frac{1}{MPa}$  دارد.

$E$  در تغییر شکل الاستیک مقداری ثابت

است اما  $d\lambda$  تغییر کرده و کار سختی  $\epsilon$

رابطان می کند.

در تغییر شکل پلاستیک و با حرکت نا بجا می ها، ماهیت ماده از نظر مکانیکی عوض می شود و

دانشمندی نا بجا می ها زیاد می شود. در نتیجه واکنش ماده در برابر تغییر شکل پلاستیک با

$$d\lambda = \frac{d\epsilon}{d\sigma}$$

ماده ای اولیه فرق می کند.

بحث کار سختی دید متالورژیکی شکل دادن است.

(prandle - Ruess)

روش دیگر برای درست آوردن رابطه ی قبلی

تست کشش:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

(stress state)

$$d\epsilon_1 = -2d\epsilon_2 = -2d\epsilon_3$$

(strain state)



86.7.29

(39)

چون در تغییر شکل پلاستیک:  $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0$  و  $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$

تنش دیاتریک:  $\Rightarrow \sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \sigma_1 - \frac{\sigma_1}{3} = \frac{2}{3} \sigma_1$

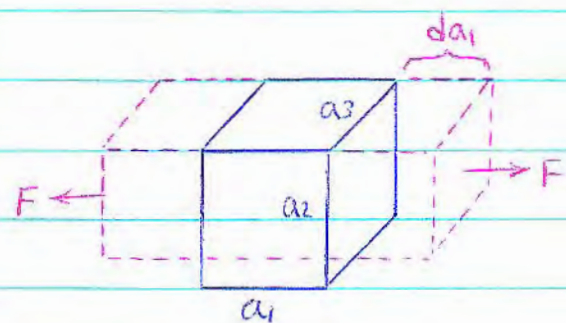
$$\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m = -\frac{\sigma_1}{3}, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m = -\frac{\sigma_1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = -2, \quad \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma'_1}{d\varepsilon_1} = \frac{\sigma'_2}{d\varepsilon_2} = \frac{\sigma'_3}{d\varepsilon_3} = d\lambda''$$

$$d\varepsilon_1 = d\lambda'' \sigma'_1 = d\lambda'' \left[ \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right] \quad \text{در حالت کلی:}$$

$$= d\lambda'' \left[ \frac{2}{3} \sigma_1 - \frac{1}{3} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = d\lambda \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]$$



کار تغییر شکل پلاستیک:

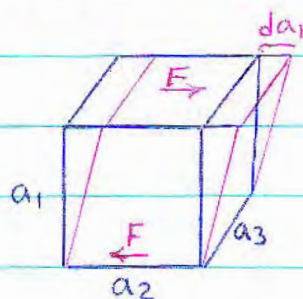
$$dW = F da_1$$

$$\frac{dW}{V} = \frac{F da_1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = \frac{F}{a_2 \cdot a_3} \frac{da_1}{a_1}$$

بر واحد حجم  $\Rightarrow dw = \frac{dW}{V} = \sigma_1 \cdot d\varepsilon_1$

در الاستیک چون رابطه‌ی بین  $\sigma_1$  و  $\varepsilon_1$  معلوم بود از انتگرال بدست می‌آمد.

در حالت تنش برشی:



$$dW = F da_1$$

$$dw = \frac{dW}{V} = \frac{F}{a_2 \cdot a_3} \cdot \frac{da_1}{a_1}$$

$$\Rightarrow dw = \tau d\gamma_1$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} dw &= \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} \\ dw &= \sigma_e d\epsilon_e = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 \end{aligned} \right.$$

اثبات می شود (تمرین)

برای حالت خاص تنش صاف:  $\sigma_3 = 0$ ,  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \alpha$ ,  $\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = \rho$

$$\sigma_e d\epsilon_e = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 = \sigma_1 d\epsilon_1 (1 + \alpha\rho)$$

این حالت برای تنش های اصلی است.

$$d\epsilon_e = \frac{\sigma_1 d\epsilon_1}{\sigma_e} (1 + \alpha\rho)$$

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} \left[ 2(\alpha^2 - \alpha + 1) \right]^{1/2} = \sigma_1 (\alpha^2 - \alpha + 1)^{1/2}$$

$$\Rightarrow d\epsilon_e = \frac{d\epsilon_1}{(\alpha^2 - \alpha + 1)^{1/2}} (1 + \alpha\rho)$$



از روابط : Levi - Misses

$$\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = \rho = \frac{d\lambda[\sigma_2 - 0.5(\sigma_1 + \sigma_3)]}{d\lambda[\sigma_1 - 0.5(\sigma_2 + \sigma_3)]} = \frac{\alpha - 1/2}{1 - \alpha/2} = \frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\rho + 1}{2 + \rho}$$

$$\Rightarrow d\epsilon_e = \frac{\sqrt{2} d\epsilon_1 (\rho^2 + \rho + 1)}{(3\rho^2 + 3\rho + 3)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2} d\epsilon_1}{\sqrt{3}} (\rho^2 + \rho + 1)^{1/2}$$

$$\Rightarrow d\epsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \right)^2 d\epsilon_1^2 + \left( \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} \right) d\epsilon_1^2 + d\epsilon_1^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow d\epsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} [d\epsilon_2^2 + d\epsilon_1 d\epsilon_2 + d\epsilon_1^2]^{1/2}$$

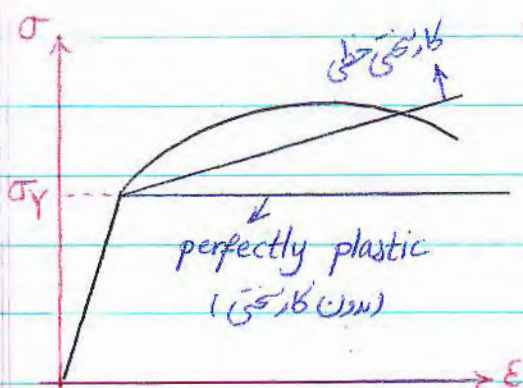
$$: d\epsilon_3 = -d\epsilon_1 = -d\epsilon_2 \quad \text{چون}$$

$$\Rightarrow d\epsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} [d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2]^{1/2}$$

86.8.6

فصل 3:

رفتار مکانیکی ماده در محدوده تغییر شکل پلاستیک:

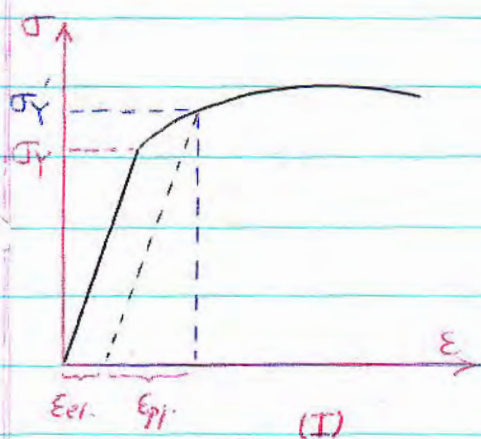


کار سختی : work Hardening  
or  
strain Hardening (کاهش سختی)

ماده‌ی کارشده از لحاظ مکانیکی : strain H. - wrought و work H. به یک معادلند.

اگر وارد منطقه‌ی پلاستیک شویم و کشش را متوقف کنیم، مقدار  $\sigma_y$  در اثر کار سختی افزایش

خواهد یافت. بطوریکه اگر کشش را دوباره اعمال کنیم



تغییر شکل پلاستیک از  $\sigma'_y$  شروع خواهد شد و

ماده در  $\sigma'_y$  تسلیم خواهد شد. به عبارتی دانسیته‌ی

ناجایب بالا رفته است و استحکام بالا رفته است.

سختی : مقاومت سطح فلز نسبت به جسم فرو رنده.

قابلیت سختی پذیری : یعنی در ماده فازی وجود یابد که سختی را زیاد کند. مثل مارتنزیت در فولاد.

روبرو کار سختی خطی در واقع باید نوع تقریب رسم شده است و ممکن است کاملاً خطی نباشد.

در منطقه‌ی پلاستیک  $\sigma_y$  بطور تدریجی دارد تغییر می‌کند. و این برای نمودار بالانیز صادق است.

همین دلیل تنش سیلان نام دارد. رابطه‌ی مقابل برای کار سختی خطی صادق است:

$$\bar{\sigma} = A + B\bar{\epsilon} \quad : \quad \text{تنش سیلان (flow stress)}$$

این معادله برای شبیه سازی حالات دیگر است.



در حالت عاری (بنودار II) در منطقه پلاستیک معادله زیر وجود دارد:

$$\{\text{Lüdwick رابطه}\} \quad \bar{\sigma} = k \bar{\epsilon}^n$$

$n$ : توان کار سختی

$k$ : ضریب کار سختی

$\log \bar{\sigma}$

$$\Rightarrow \log \bar{\sigma} = \log k + n \log \bar{\epsilon}$$

با داشتن مقادیر  $\bar{\sigma}$  و  $\bar{\epsilon}$  در آزمایشگاه بتوان  $k$  و  $n$

رابطه را تعیین کرد.

$$\epsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) = \ln(1+e) = e + \frac{e^2}{2!} + \frac{e^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \epsilon \approx e \quad \text{در کشش‌های کوچک}$$

$$\text{تشن مهندسی} : S = \frac{F}{A_0} \rightarrow \text{سطح مقطع اولیه} \quad \text{تشن حقیقی} : \sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \text{سطح مقطع کنونی}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \times \frac{A_0}{A} = S \times \frac{A_0}{A} = S(1+e)$$

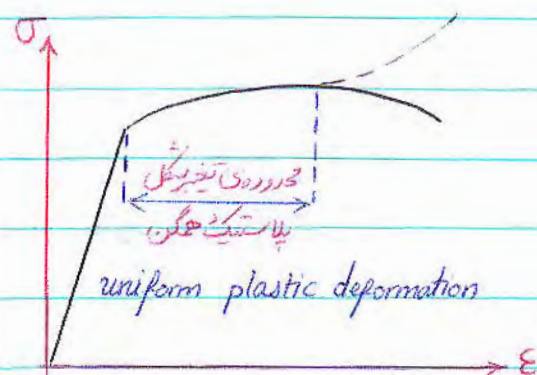
$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{A_0 - A}{A} = \frac{A_0}{A} - 1 \Rightarrow \frac{A_0}{A} = e + 1 \quad \text{حجم ثابت است}$$

$$\sigma = S(1+e)$$

رابطه کشش مهندسی و تشن حقیقی:

نیروی کشش به یک max می‌رسد. چون ماده تا یک حوزی نیرو می‌خواهد. از یک جایی به بعد

نیرو کاهش می یابد. پس تنش مهندسی از یک جایی به بعد کاهش می یابد. اما در مورد تنش حقیقی

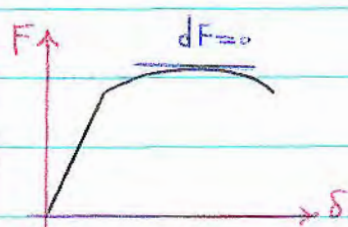


دلیل کاهش سطح مقطع تنش زیاد می شود.

بعد از محدودیت تغییر شکل همگن و یکپارخت

پدیده ی گلویی شدن رخ می دهد؛ دلیل تمرکز

تنش در قسمت هایی خاص از میل. (Gage length) حولانی تنش پلاستیک همگن را می توان



دوست آرد:

$$F = \sigma \cdot A$$

تنش حقیقی

$$dF=0 \Rightarrow \sigma dA + d\sigma \cdot A = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A} = \frac{dL}{L} = d\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} = d\varepsilon$$

طول افزایشی و سطح مقطع کاهش می یابد.

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$$

(شیب نمودار  $\sigma$ - $\varepsilon$  برابر  $\sigma$  است)

پس max جایی اتفاق می افتد که رابطه بالا برقرار باشد. {رجهان لحظه} معیار Considere

معیار فوق در واقع معیاری برای ناپایداری است. (Instability)

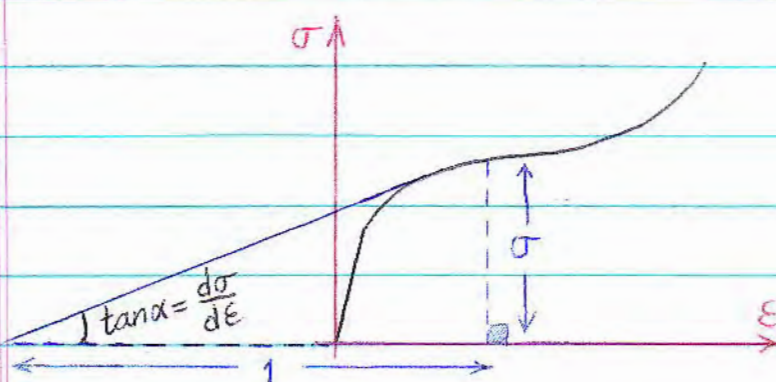
پس از جایی که F شروع به کاهش می کند، ناپایداری در تغییر شکل پلاستیک روی می دهد. بی خواهیم



این حد را بدست آوریم. این مورد را چنانکه  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$  اتفاق می افتد.

یک بحث دیگر این است که ماده بعد از necking چقدر تغییر شکل می تواند تحمل کند. یعنی

میزان کرنش بعد از necking که برای سوپر الاستیک ها این مقدار زیاد است.



$$\tan \alpha = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$$

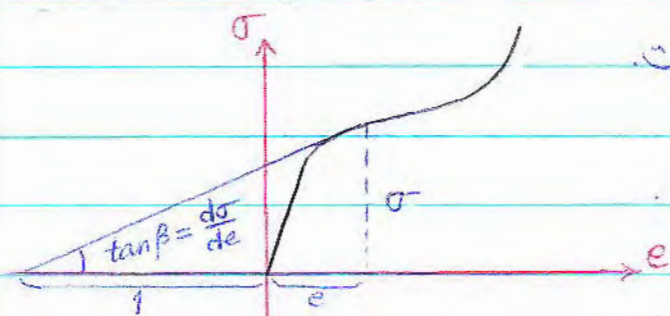
مغرافقی ماندازی 1 واحد است.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{de} \cdot \frac{de}{d\varepsilon} = \sigma$$

$$\varepsilon = \ln(1+e) \Rightarrow d\varepsilon = \frac{de}{1+e}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{de} (1+e) = \sigma$$

معيار Considere بر حسب تنش حقیقی و کرنش (کندشی):  $\Rightarrow \frac{d\sigma}{de} = \frac{\sigma}{1+e}$



در نمودار بالا تشخیص 1 واحد مشکل است.

اما برای نمودار تشخیص 1 مشکل نیست.

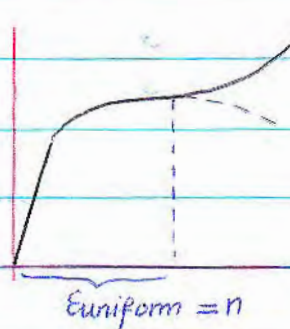
از سمت چپ از مرکز 1 واحد تصحیح (برای ما)

درجه بندی (e) و بعد مناسبی بر نمودار رسم می کنیم. ما با پایداری = پایان تغییر شکل پلاستیک هستیم.

برای عمومی کردن معیار Considere و استفاده در تمام تست ها، تنش و کرنش را معادل در نظر میگیریم:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\sigma}$$

$$\bar{\sigma} = k \bar{\epsilon}^n \Rightarrow k n \bar{\epsilon}_u^{n-1} = k \bar{\epsilon}_u^n = \bar{\sigma} \Rightarrow \bar{\epsilon}_u = n$$



مقدار کرنش یکپوخت (قبل از ناپایداری) برابر توان کار سختی است.

پس از این معیار می توان در هر تست دیگری جز کشش

استفاده کرد.

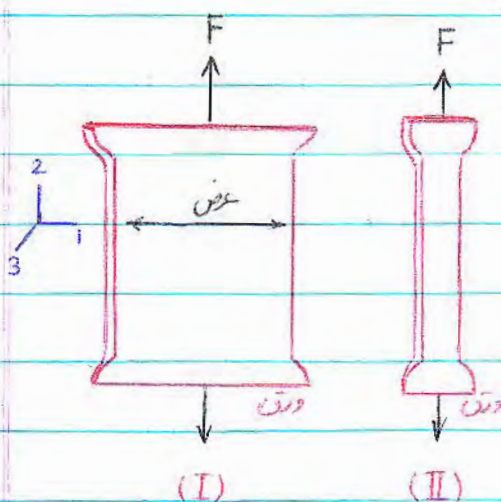
#### فصل 4. شبیه سازی

فیزیکی ← کاری که در آزمایشگاه انجام می دهیم

شبیه سازی (Simulation)

ریاضی

آزمایش کشش با کرنش صفحه ای (نمونه ای ورق):



در ورق I، در بعد عرضی تغییر شکل نداریم چون بزرگ

است. در عرض ضخامت کم است. در ضخامت تغییر طول

داریم. در عرض یا بجای هادی تغییر شکل می یابیم



فاصله‌ی بیشتری را طی کنند پس مقاومت بیشتری وجود دارد در حالیکه در ضخامت اینطور نیست. پس

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0)$$

$$\text{در نمونه I: } \epsilon_2 = -\epsilon_3, \epsilon_1 = 0$$

$$\text{در نمونه II: } \epsilon_2 = -2\epsilon_3 = -2\epsilon_1$$

$$\text{I: } \bar{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\epsilon_2| = 1.15 |\epsilon_2|$$

$$\text{II: } \bar{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} |\epsilon_2| = |\epsilon_2|$$

{ کرنش و تنش معادل، مثبت گزارش می شوند }

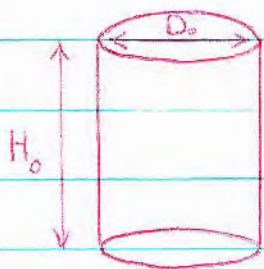
در حالت I، ملاحظه می شود، گلوله شدن دیرتر اتفاق می افتد پس کرنش بیشتری می توان

اعمال نمود.

86.8.8

3- آزمایش فشار ساده:

ابعاد نمونه Full size بصورت مقابل است.



$$H_0 = 2 \text{ cm}$$

$$D_0 = 10 - 12 \text{ mm}$$

برای جلوگیری از کماتش نمونه (Buckling)

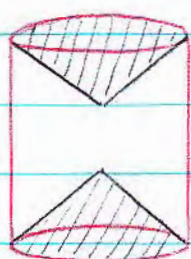
$$\text{باید } \frac{H_0}{D_0} < 2 \text{ باشد.}$$

پس نکته وسط بالایی و پایینی استوانه اصطکاک وجود دارد چون می خواهد افزایش سطح مقطع

بدهد (افزایش قطر) پس سطح استوانه تمایل به حرکت به سمت راست و چپ دارد. بنابراین

اصطکاک بین دو سطح بر جود می آید. اصطکاک موجب تغییر در یکپارخت بودن تغییر شکل

می شود و تغییر شکل را غیر یکپارخت می کند.



نسبت های مَرده در تغییر شکل بصورت مخروطی باشد.

این مخروط ها در اثر وجود اصطکاک ایجاد شده اند. چون

در اثر تماس با سنبه با حقی حرکت نمی کند.

شرط دوم: اصطکاک تا حد ممکن کاهش یابد: بین دو سطح ورق میکا قرار گیرد. بین دو سطح

روغن بزنیم. اگر تغییر شکل در دمای بالا انجام شود، روغن جواب نمی دهد و از میکا استفاده میشود.

از پودر گرافیت هم استفاده می شود. ویلزات ثانوی از جنس نیتريد پور.

به حال اصطکاک از بین نمی رود. ممکن است در مراحل اولیه کم باشد اما تا یک جایی اینطور است

و بعد شبکه ای می شود (Barreling)

در کشش غیر یکپارخت شدن تغییر شکل زودتر اتفاق می افتد. در کشش قطعه بعد از necking

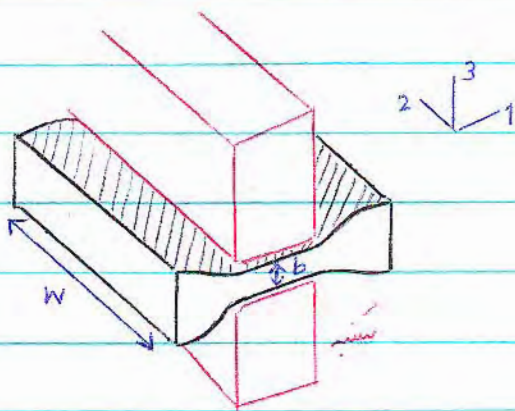
پاره می شود اما در مورد فشار این طور نیست و بعد از شبکه ای شدن قطعه پاره نمی شود.



$\sigma_1$ : راستای فشار  $\bar{\sigma} = \sigma_1$   $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{1}{2} \epsilon_1$

همانند کشش ساده است.  $\bar{\epsilon} = |\epsilon_1|$  برای اینکه Barrelling و Buckling اتفاق

نیفتد و بتوانیم کرنش های بیشتری اعمال کنیم تست زیر را انجام می دهیم.



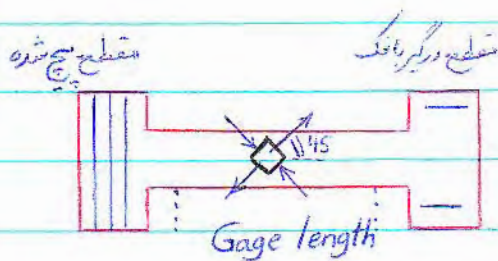
4. فشار با کرنش صفحه ای:

$\frac{w}{b} \geq 5$   $\epsilon_2 = 0$

$\epsilon_1 = -\epsilon_3$

این تست در زمانی بالا خیلی معمول است (نورده)  $\bar{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{1/2} = 1.15 |\epsilon_3|$

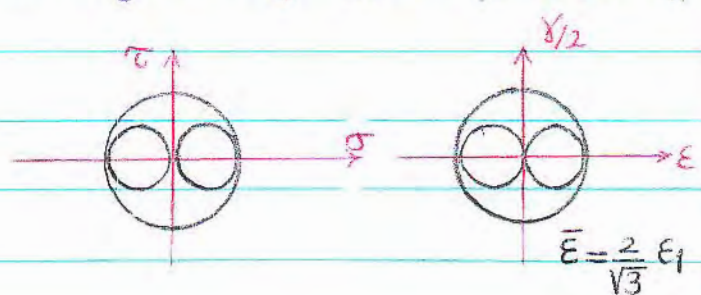
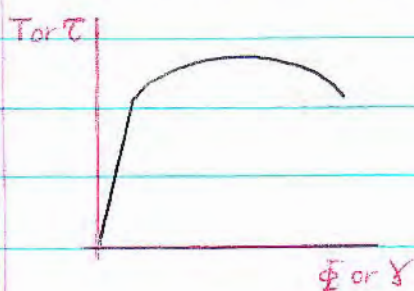
5. تست پیچش:



نمونه شبیه به نمونه کشش است.

دستگاه پیچش شبیه به دستگاه تراستکاری است.

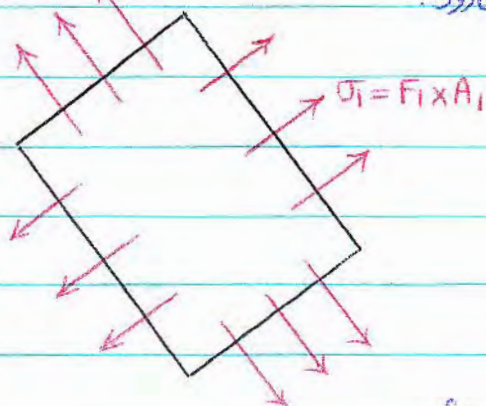
باید  $\bar{\sigma}$  و  $\bar{\epsilon}$  را بدست آورد. این تست نه Barrelling دارد و نه Buckling و کرنش ها بزرگ هستند.



6. آزمایش کشش دو محوری متوازن ورق ها: (balanced biaxial Tension)

علت بررسی: برای تهیه ی گلگیر اتومبیل وقتی ورق زیر پرس می رود، از دو جهت به آن کشش وارد

می شود. این تست ها برای شبیه سازی فیزیکی به کار می رود.



در شکل دی ورق، plane stress داریم:

$$\sigma_3 = 0 \quad \sigma_1 = \sigma_2 \quad (\text{متوازن})$$

می خواهیم ببینیم necking چه موقع روی می دهد؟

$$dF = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 dA_1 + \sigma_2 dA_2 = 0$$

شرط ناپایداری

در اثر کار سختی چون  $\sigma_y$  زیاد می شود، سطوح معیار تسلیم و فون میسر نیز بزرگ می شود.

مثلاً بیضی خطه خطه بزرگ می شود.

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = - \frac{dA_1}{A_1} = \frac{dL_1}{L_1} = d\epsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} = \sigma_1$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)^{1/2} = \sigma_1 \Rightarrow d\bar{\sigma} = d\sigma_1$$

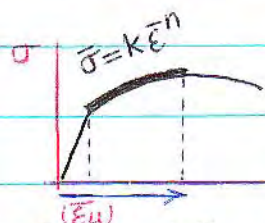
$$\bar{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{1/2} = 2|\epsilon_1| = 2\epsilon_1 \quad (\epsilon_1 > 0) \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\frac{\epsilon_3}{2}$$

$$\Rightarrow d\bar{\epsilon} = 2d\epsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\sigma}}{\frac{d\bar{\epsilon}}{2}} = \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}$$



فرض: کارمختی با تابع نمائی  $\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$  باشد. می خواهیم حداکثری را بدست آوریم:

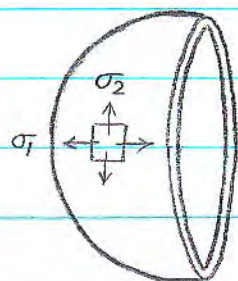
$$K n \bar{\epsilon}_u^{n-1} = \frac{1}{2} K \bar{\epsilon}_u^n \Rightarrow \bar{\epsilon}_u = 2n$$



برای کشش ساده،  $\bar{\epsilon}_u = n$  بود.

نتیجه: در حالت دو محوری، دیرتر گلوئی شدن رخ می دهد. (خیلی دیرتر) چون  $\bar{\epsilon}_u = 2n$ .

7. ناپایداری در مخزن کروی جدار نازک تحت فشار داخل:



چون از ورق تقیه شده است:  $\sigma_3 = 0$

توازن کروی:  $\sigma_1 = \sigma_2$  (plane stress)

حالت تنش مشابه کشش دو محوری است. حالت کرنش هم همینطور.

ایزوتروپ:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\frac{\epsilon_3}{2}$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}$$

$r$ : شعاع لحظه ای کوره

$t$ : ضخامت

$P$ : فشار داخل

$$P = \frac{2\sigma_1 t}{r}$$

این کوره را بعد از تسلیم بررسی می کنیم.

شرط ناپایداری:  $dP = 0 \Rightarrow \frac{2\sigma_1}{r} dt + \frac{2t}{r} d\sigma - \frac{2\sigma_1 t}{r^2} dr = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{dr}{r} - \frac{dt}{t}$$

یک نوار روی قطر بزرگ کره در نظر می‌گیریم؛ محیط اولیه  $L_0 = 2\pi r$ . اگر شعاع پانزدهمی

$dr$  زیاد شود:  $L = 2\pi(r+dr)$

$$d\epsilon_1 = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{dr}{r} = d\epsilon_2$$

(هندسی)

$$\frac{dt}{t} = d\epsilon_3$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = d\epsilon_1 - d\epsilon_3 = 3d\epsilon_1$$

$$d\epsilon_3 = -2d\epsilon_1$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_1$$

$$\bar{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{1/2} = 2\epsilon_1$$

$$\Rightarrow d\bar{\epsilon} = 2d\epsilon_1$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2} d\bar{\epsilon}$$

$$\bar{\sigma} = k \bar{\epsilon}^n$$

فرض کار سختی بصورت نمایی:

$$k \cdot n \cdot \bar{\epsilon}^{n-1} = \frac{3}{2} k \bar{\epsilon}^n$$

$$\Rightarrow \bar{\epsilon}_u = \frac{2}{3} n$$

یکی از دلایل غیر یکپارخت شدن تغییر شکل یا Local شدن، غیر یکپارختی هندسی است.



$$\frac{A_0 a}{A_0 b} = f$$

ناهمگنی هندسی:  $f > 1$  or  $f < 1$

$$F_a = F_b$$

$$\Rightarrow \sigma_a \cdot A_a = \sigma_b \cdot A_b$$

$$\epsilon_a = \ln \frac{A_0 a}{A_a}$$

$$\epsilon_b = \ln \frac{A_0 b}{A_b}$$



$$\Rightarrow \exp(\varepsilon_a) = \frac{A_{0a}}{A_a} \quad , \quad \exp(\varepsilon_b) = \frac{A_{0b}}{A_b}$$

$$\Rightarrow A_a = A_{0a} e^{-\varepsilon_a}$$

$$A_b = A_{0b} e^{-\varepsilon_b}$$

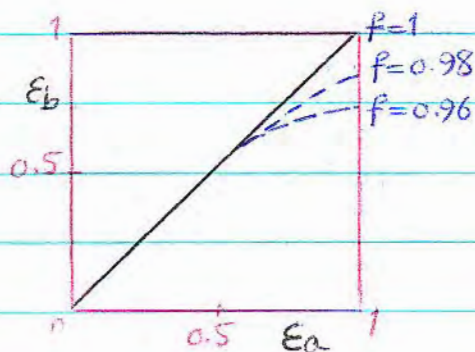
$$\Rightarrow K \varepsilon_a^n \cdot A_{0a} \cdot e^{-\varepsilon_a} = K \varepsilon_b^n \cdot A_{0b} \cdot e^{-\varepsilon_b}$$

$$\Rightarrow f \cdot \varepsilon_a^n \cdot e^{-\varepsilon_a} = \varepsilon_b^n \cdot e^{-\varepsilon_b}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b : f=1 \quad \text{اگر}$$

$$\varepsilon_a > \varepsilon_b : f < 1 \quad \text{اگر}$$

$$\varepsilon_a < \varepsilon_b : f > 1 \quad \text{اگر}$$



اگر قطعه یکنواختی هندسی داشته باشد فقط بایاداری تغییر شکل پلاستیک داریم ( $dF=0$ ) اما

ممکن است قطعه یکنواختی هندسی نداشته باشد.

غیریکنواختی‌های دیگری هم داریم: آنیل کردن درجه جابجایی نباشد. نتیجه رگسترالیزاسیون

درجه جابجایی نیست. یا مثلاً اگر رسوب داشته باشیم که در نتیجه‌ی آن رفتار ناچگانی‌ها

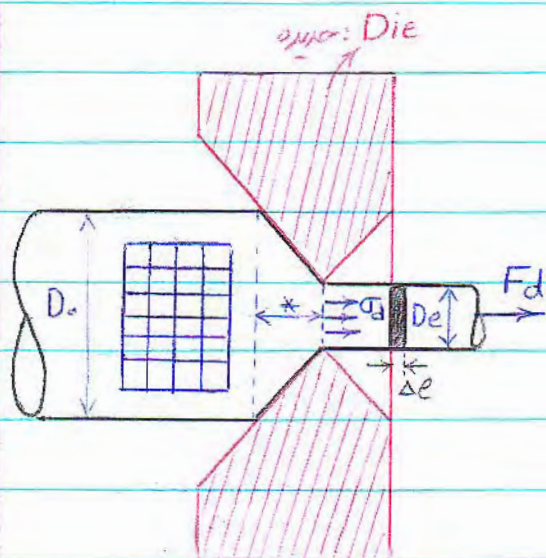
اطراف رسوب با دیگر مناطق فرق میکند.

از این به بعد وارد بحث اصلی شکل‌دارن می‌شویم.

## اصول محاسبات فرآیندهای شکل دهی فلزات:

### روش های تحلیلی:

الف) روش کارایه آل - مثال: تبدیل یک مفتول به مفتولی با قطر کمتر (Ideal work)



تمام مفتول های مسی از این روش تولید می شوند.

در مفتول را چکش می زنند تا وارد روزنه شود بعد

آزمای کشند. این کار طریقی بصورت های

زیر در این تخصیص شکل مصرف می شود:

$$w_i = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (\text{Internal plastic work})$$

$$w_i = \int_0^{\epsilon_t} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}$$

فاصله ای \* کرنش از صفر تا  $\epsilon_t$  تخصیص می کند:

$$\epsilon_t = \ln \frac{A_0}{A} = 2 \ln \frac{D_0}{D}$$

کل انرژی به تخصیص شکل پلاستیک تبدیل نمی شود. چون اصطکاک داریم: تماس قالب

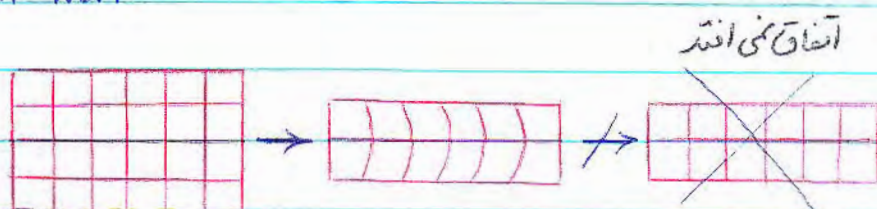
با مفتول. حرکت مفتول نسبت به قالب به آرامی انجام نمی شود



فرایند کسش سیم فوق در حالت سرد انجام میشود چون در حالت گرم زود پاره میشود بعد از تغییر

شکل. بعد از کسش متوجه می شویم Die گرم می شود یعنی اصطکاک داریم.

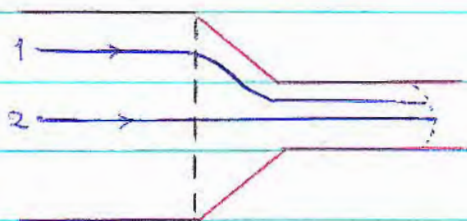
$w_f$ : friction work



با توجه به تقارن محوری، خطوط افقی تمایلی به تغییر جهت ندارند برخلاف خطوط عمودی.

چون مقداری انرژی صرف تشکیل این مطرح اضافی معدنی شکل میشود پس کار اضافی داریم:

(redundant work)



در طی اول مسافت بیشتری طی می کند پس در

نهایت در طی دوم جلوه می افتد و یک سطح

معدنی ایجاد میشود. در واقع این کار اضافی یعنی کار تغییر شکل غیر یکنواخت پس لایه‌ی

نزدیک به سطح هم به دلیل اصطکاک و هم کار اضافی بالایی درونی متفاوت است بنابراین

$w_r$ : redundant work.

غیر یکنواخت است.

$$W_a = \text{actual work} = W_i + W_f + W_r$$

در روش کار ایده آل چندین فرض ساده شونده می‌کنیم از جمله:  $W_a = W_i$

یعنی کار اضافی و کار اصطکاک نداریم. در روش کشش سیم، سطوح قالب حتماً روغن کاری می‌شوند. بدون روغن کاری انجام نخواهد شد.

این فرض‌ها را برای تحلیل می‌کنیم. بنابراین ضریبی هم برای  $W_i$  در نظر می‌گیریم:

$$W_a = \frac{1}{\eta} W_i \quad \eta = \frac{W_i}{W_a} \quad \text{راندمان (بازده)}$$

بنابراین اثر اصطکاک و کار اضافی بصورت یک ضریب در نظر گرفته می‌شود. که این فقط تقریبی

برای مسئله است. ( $\eta < 1$ )

در فاصله  $x$  در شکل اول، تغییر شکل پلاستیک در نتیجه کار سختی داریم:  $\sigma = K \bar{\epsilon}^n$

$$W_i = \int_0^{\epsilon_t} K \bar{\epsilon}^n d\bar{\epsilon} = \frac{K \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\epsilon_t} \Rightarrow W_a = \frac{1}{\eta} \frac{K \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1}$$

$\eta$  در جدول وجود دارد. برای این فرایند بازده کم است. (60 الی 65 درصد). بطور

تجربی هم بدست می‌آید. برای شکل دادن ورق کار پلاستیک مهم است. چون زیاد است اما

در این جا اصلاً مطرح نیست.



دلیل تحول های متالورژیکی، اثر نرخ کرنش بیشتر در دماهای بالا مطرح است.

باتوجه به شکل اول:  $W_a = F_d \cdot \Delta \ell_1 \Rightarrow w_a = \frac{W_a}{V} = \frac{F_d \cdot \Delta \ell_1}{A_e \cdot \Delta \ell_1}$

$$\Rightarrow w_a = \sigma_d = \frac{1}{\eta} \frac{k \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1}$$

$F_d$ : نیروی کشش

$\eta$ : تنش کشش در خروج

برای رابطه، کرنش، کرنش معادل است:  $\bar{\epsilon} = \epsilon_x = \ln \frac{A_0}{A}$

$\epsilon_r, \epsilon_x, \epsilon_\theta$

در مختصات استوانه‌ای:

$\bar{\epsilon} = \epsilon_x$  علت:  $\epsilon_r = \frac{dr}{r}$

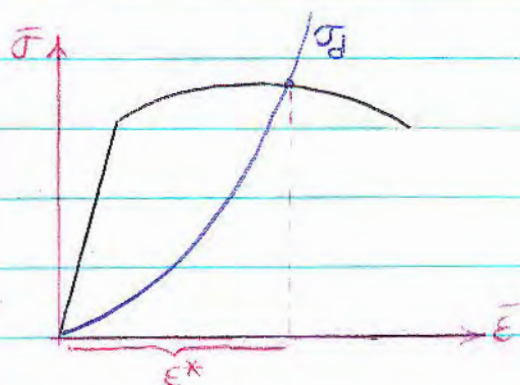
مثل کرد  
↑

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+dr) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \epsilon_\theta = -\frac{\epsilon_x}{2} : \bar{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_x^2 + \epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2) \right]^{1/2} = \epsilon_x$$

$\epsilon_\theta$ : کرنش حلقه‌ای. یک حلقه دایره که دارد تنگ می‌شود.

چقدر میتوان این سیم را کشید؟



$$\sigma_d = \frac{1}{\eta} \frac{k \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1}$$

$$\sigma_d = k \bar{\epsilon}^{*n}$$

$$\Rightarrow k \bar{\epsilon}^{*n} = \frac{1}{\eta} \frac{k \bar{\epsilon}^{*n+1}}{n+1} \Rightarrow \bar{\epsilon}^* = \eta(n+1)$$

$\bar{\epsilon}^*$ : کرنش حری . درکش سیم از هر قطری به قطر دیگر نمی توان رفت . مثلاً سیم  $3^{mm}$

بایک مرحله به سیم با قطر  $0.5^{mm}$  تبدیل نمی شود . البته از  $3^{mm}$  به  $2.9^{mm}$  هم صند نیست

در یک پاس (بار) نمی توان تغییر قطر زیادی انجام نمود . باید سر راه سیم 4 ، 5 یا Die دراز

داد .

اگر سیم آبی شود (  $n$  زیاد می شود ) ← کرنش حری بالایی رود .

اگر روغن کاری کنیم (  $\eta$  زیاد می شود ) ← کرنش حری بالایی رود .

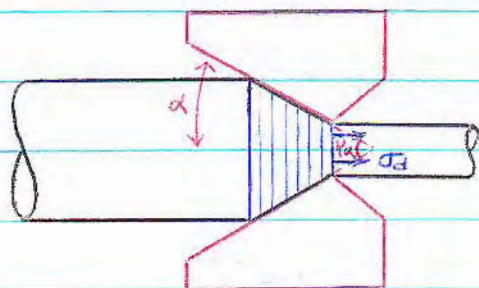
86.8.20

$\eta$ : وابسته به شرایط فرایند

$$\bar{\epsilon}^* = \eta(n+1)$$

$n$ : وابسته به جنس ماده

مغزول حربی کار سخت شده است .



هرچه  $\eta$  بیشتر شود ،  $\bar{\epsilon}^*$  ( حداکثر کرنش )

در یک پاس ( نبر بیشتر می شود )

$\bar{\epsilon}^*$ : کرنش بحرانی . میزان کار سختی طوری است که  $\sigma_d$  باعث پاره شدن نمی شود .

با تغییر  $\alpha$  میتوان میزان کار اضافی را تغییر داد . اگر  $n$  هم زیاد شود ،  $\bar{\epsilon}^*$  نیز بیشتر می شود .



رومهندسی مطلوب است که تعداد die ها در فرایند را کم کرد، یعنی بتوان در یک پاس تغییر

شکل بیشتری اعمال کرد.

$$\eta = 100\% = 1 \Rightarrow \bar{\epsilon}^* = n + 1 \quad n=0 \Rightarrow \bar{\epsilon}^* = 1 = \ln \frac{A_0}{A} = \ln \frac{1}{1-r}$$

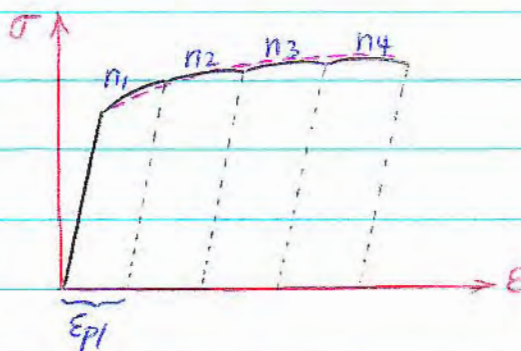
$n=0$  : ماده بدون کار سختی : Rigid perfectly plastic

$$\Rightarrow r = \frac{A_0 - A}{A_0} \Rightarrow e = 2.7 = \frac{1}{1-r} \Rightarrow r = 63\%$$

یعنی حداکثر reduction می تواند 63% باشد. اگر  $n$  هم صفر نباشد چون  $\eta$  خیلی

از یک کوچکتر است باز هم  $\bar{\epsilon}^*$  به 63% نمی رسد. پس در یک پاس، حداکثر reduction

63% است. رومهندسی با ضرب اطمینان مناسب،  $r = 40\%$  مطلوب است تا مطمئن شویم



سیم پاره نمی شود.

$$n_1 > n_2 > n_3 > n_4$$

درکشش:

(شیب کم می شود)

در این جا هم سیم پس از گذشتن از die اول کار سخت شده است و در هر پاس،  $n$  دارد

کوچک می شود. می توان یک منحنی معادل نیز در نظر گرفت.

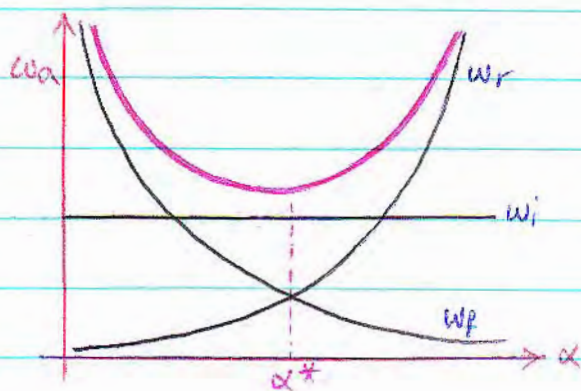
درپاس های بعدی احتمال پارگی وجود دارد در نتیجه وسط را نباید آئیل شود امروزه

یک کوره را این die ها قرار می دهند و آئیل را انجام می دهند با آئیل کردن دانسیته

جابجایی ها پاس می آید و  $n$  زیاد می شود در نتیجه قابلیت کشش بوجود می آید.

بحث در مورد  $\alpha$  یا خود قالب :

$\alpha$  بزرگ باشد خوب است یا کم؟ نه  $\max$  خوب است و نه  $\min$ . بلکه یک ایتیم



وجود دارد.

$$w_a = w_i + w_r + w_p$$

$$w_i = \int \sigma d\epsilon = \frac{k \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1}$$

$w_i$  به میزان کرنش مستقی دارد یعنی تغییرات قطر die که وابسته به دهانه قالب

است نه  $\alpha$ . هرچه  $\alpha$  کوچک باشد مقدار اصطکاک بیشتر است چون سطح تماس

بیشتری شود. البته با تغییر  $\alpha$  فشار قالب روی مافیل هم تغییری کند. در  $\alpha$  بزرگ انحنای بیشتری

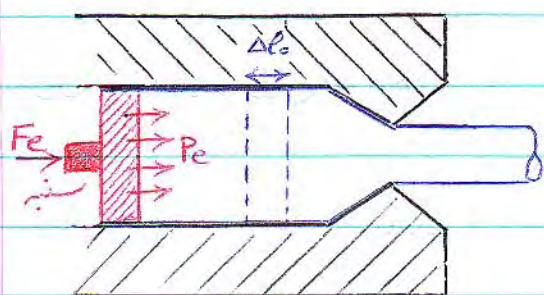
وجود دارد (هم تندی ایجاد شده و بعد از die دوباره باید برگردد). با بزرگ شدن  $\alpha$  میزان

redundant  $w$  زیاد می شود. با این حال امطاری رود در مقدار یک  $\min$  وجود داشته باشد.



## Extrusion

## روش 2. اکستروژن (روغن رانی)



مثل قبلی است اما اعمال نیرو از پشت است.

(اعمال فشار)

در این جا ما مفتول نداریم و قطر لوله‌ی اولیه در حدود چندین cm است.

$$W_a = F_e \cdot \Delta \ell_0 \quad W_a = \frac{W_a}{V} = \frac{F_e}{A_0} \cdot \frac{\Delta \ell_0}{\Delta \ell_0} = P_e \quad \text{فشار اکستروژن}$$

یک تفاوت عمده بین اکستروژن و کشش سیم این است که در این جا پارگی وجود ندارد اما

در قبلی داشت (63٪). چون فشار داریم محدودیتی وجود ندارد. مفتول با قطر چندین cm

(3cm) در یک پاس به مفتولی با قطر چند mm (1mm) تبدیل می شود. چون لوله در داخل قالب

است، مشکلی Barrelling و هم چنین Buckling هم وجود ندارد. پروفیل آلومینیومی که در

قالب عکس وجود دارد و مقطع پیچیده ای دارد و لوله هائی که در ادواتور دارای پره می باشد، مختصراً

از این روش تولید می شود. خود قالب باید تحمل این فشار را داشته باشد و معمولاً از جنس فولاد

محکم شده است. رابطه مثل کشش سیم است. در روش کار ایده آل این دو یک فرمول دارند:

$$W_a = \frac{1}{\eta} W_i = \frac{1}{\eta} \int \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \Rightarrow P_e = W_a = \frac{1}{\eta} \frac{k \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1}$$

Slab Method:

روش (2) روش تختال :

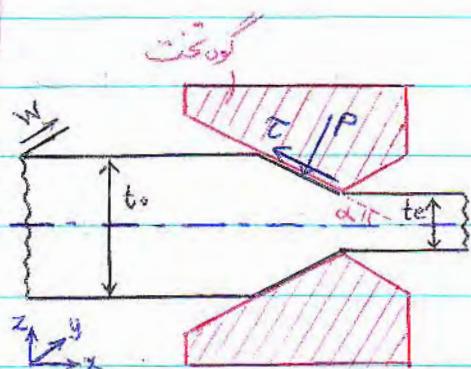
فرض ها: در این روش اصطکاک را در نظریه گیریم . 2 - ماده بدون کار سختی در نظر گرفته

می شود . 3 - کار اضافی وجود دارد . 4 - شرایط گرفتن صفحه ای حاکم است .

5 - ضریب اصطکاک ثابت است . 6 - نیم زاویه ی قالب ثابت است .

strip drawing

\* کشش نوار :

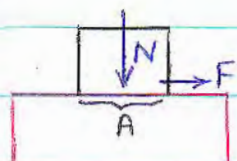


یک تسمه ی بچن به تسمه با ضخامت کمتر تبدیل

می شود . در اینجا تمامان محوری نداریم . اما تمامان

آینده ای با صفحه ی نشان داده شده داریم . چون

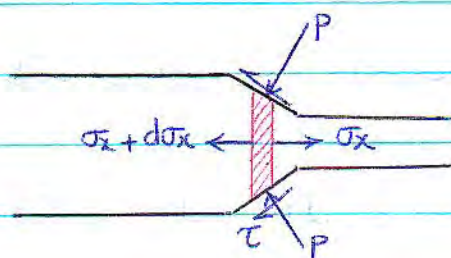
کار اضافی نداریم سطح عمودی بعد از die همچنان عمودی باقی می ماند در حالیکه گفته

شد باید محدب شوند . چون عرض از  $t_0$  خیلی بزرگتر است :  $(W \gg t_0)$   $\epsilon_y = 0$ نیروی اصطکاک  $F = \mu N$ 

$$\frac{F}{A} = \tau = \mu \frac{N}{A} = \mu P$$

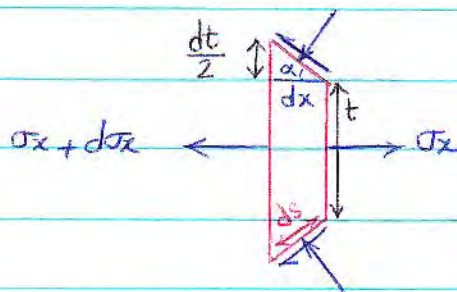
P: فشار  $\mu$ : ضریب اصطکاک لغزنده  $\Rightarrow \tau = \mu P$ در شکل :  $\tau$  تنش برشی اصطکاک کی است .





«مخالفات هم متغیر است»

در فاصله های ابعالی تنش، تنش ثابت نیست



$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\tan \alpha = \frac{dt/2}{dx} = \frac{dt}{2dx}$$

تعداد کالسی می:

$$\sum F_x = 0 : \sigma_x t w_0 - (\sigma_x + d\sigma_x)(t + dt)w_0$$

$$-2P ds w_0 \sin \alpha - 2\mu P ds w_0 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow -t d\sigma_x - \sigma_x dt - 2P ds \sin \alpha - 2\mu P ds \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t d\sigma_x + \sigma_x dt + 2P \tan \alpha dx + 2\mu P dx = 0$$

$$\Rightarrow t d\sigma_x + \sigma_x dt + P dt + \mu P \cot \alpha dt = 0$$

$$\Rightarrow t d\sigma_x + dt [\sigma_x + P(1 + \mu \cot \alpha)] = 0 \quad ; \quad \mu \cot \alpha = B$$

$$\Rightarrow t d\sigma_x + dt [\sigma_x + P(1 + B)] = 0$$

$$\sum F_z = 0 : \mu P w_0 ds \sin \alpha - P w_0 ds \cos \alpha - \sigma_z w_0 dx = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \mu P \tan \alpha - P \Rightarrow \sigma_z = -P(1 - \mu \tan \alpha)$$

در اثر روغن کاری خوب، کم می شود و البته چون  $\alpha$  برای قالب در حدود  $20^\circ$  است پس

$$\sigma_z = -P \quad \mu \tan \alpha \text{ در مقابل 1، قابل صرف نظر است. پس:}$$

چون فرض کرده بودیم این کار اضافی وجود ندارد پس تنش ها اصلی هستند؛ روابط روی

سطوح تنش برشی صفر است.

$$\epsilon_y = 0 \Rightarrow d\lambda [\sigma_y - 0.5(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \Rightarrow \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

پس  $\sigma_x$  بزرگترین تنش و  $\sigma_z$  کمترین است.

$$\text{معیار فرسایش: } (\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_y = 2K) \quad * \sigma_x - \sigma_z = 2K$$

86 . 8 . 22

$$\Rightarrow \sigma_x - (-P) = 2K \Rightarrow P = 2K - \sigma_x$$

ماده را *perfectly plastic* فرض کرده ایم یعنی کار سختی نداریم. اگر  $K$  متغیر باشد، نمی توان

معادله ای دقیقاً مثل راحله کرد.

$$t d\sigma_x + [\sigma_x + (2K - \sigma_x)(1+B)] dt = 0$$

$$\Rightarrow t d\sigma_x + [-B\sigma_x + 2K(1+B)] dt = 0$$



$$\frac{d\sigma_x}{[B\sigma_x - 2K(1+B)]} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{B} \ln(B\sigma_x - 2K(1+B)) = \ln(tc')$$

$$\Rightarrow \ln(B\sigma_x - 2K(1+B)) = \ln(tc')^B = \ln(t^B \cdot c'')$$

چون که  $t = t_0$  است،  $\sigma_x = 0$  چون هنوز وارد منطقه تغییر شکل نشده ایم.

$$\text{شرایط مرزی: } t = t_0 \Rightarrow \sigma_x = 0 \quad t = t_e \Rightarrow \sigma_x = \sigma_d$$

↑ همان کششی که می کشیم

$$B\sigma_x - 2K(1+B) = t^B \cdot c'' \Rightarrow c'' = \frac{-2K(1+B)}{t_0^B}$$

$$\Rightarrow B\sigma_x - 2K(1+B) = t^B \left[ \frac{-2K(1+B)}{t_0^B} \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 2K \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_0} \right)^B \right]$$

$$t = t_e \Rightarrow \sigma_x = \sigma_d \Rightarrow \frac{\sigma_d}{2K} = \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{t_e}{t_0} \right)^B \right]$$

$$\epsilon_t = \epsilon_z = \ln \frac{t_0}{t_e} \Rightarrow \frac{t_0}{t_e} = \exp(\epsilon_t) \Rightarrow \frac{t_e}{t_0} = \exp(-\epsilon_t)$$

$$\epsilon_y = 0 \Rightarrow \epsilon_x = -\epsilon_z = -\epsilon_t \quad : \quad \bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_t = 1.15 \epsilon_t$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_d}{2K} = \frac{1+B}{B} [1 - \exp(-B\epsilon_t)]$$

اگر از معیار فون میز استفاده کنیم:

$$[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2] = 6K^2 = 6\tau_y^2$$

تنش های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  واقعاً اصلی نیستند چون redundant W. داریم و تنش

برشی ایجاد می شود.

$$\left[ \left( \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \left( \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sigma_z \right)^2 \right] = 6k^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} (\sigma_x - \sigma_z)^2 = 6k^2 \Rightarrow \sigma_x - \sigma_z = 2k \neq \sigma_y \quad \text{بر خلاف ترسکا}$$

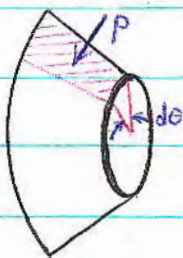
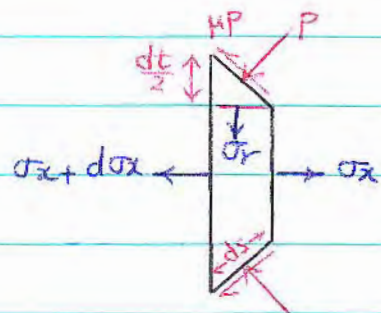
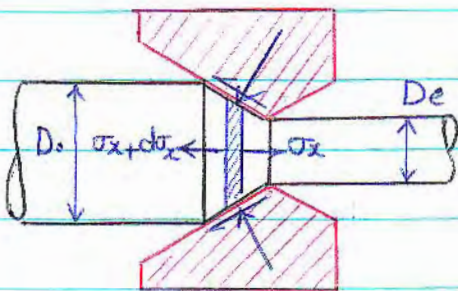
$$(2k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y)$$

در هر دو معیار به یک جواب رسیدیم چون این دو معیار در برخی شرایط جواب یکسانی داشتند.

دوباره میتوان از تلاقی دو منحنی، حد کرنش را بدست آورد.

\* مسئله کشش سیم از روش تخیل:

در اینجا، فرض plane strain داریم. (مختصات قطبی است)



$$P \int_0^{2\pi} \left( \frac{D + D + dD}{4} \right) d\theta ds \cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\tan\alpha = \frac{dD}{2dx}$$



$$\Sigma F_x = 0 : \sigma_x \frac{\pi D^2}{4} - (\sigma_x + d\sigma_x) \pi \frac{(D+dD)^2}{4} - P \pi \frac{(D+D+dD)}{2} ds \cdot \sin \alpha$$

$$- \mu P \pi \frac{(D+D+dD)}{2} ds \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma_x dD + D d\sigma_x + 4P \tan \alpha \cdot dx + 4\mu P dx = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma_x dD + D d\sigma_x + 2P dD + 2\mu P \frac{dD}{\tan \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow D d\sigma_x + 2[\sigma_x + P(1+B)] dD = 0 \quad ; \quad B = \mu \cot \alpha$$

$$\Sigma F_r = 0 : -\sigma_r \pi D dx - P \pi \left( \frac{2D+dD}{2} \right) ds \cos \alpha$$

$$+ \mu P \pi \left( \frac{2D+dD}{2} \right) ds \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_r dx + P dx - \mu P dx \tan \alpha = 0 \Rightarrow \sigma_r = -P(1 - \mu \tan \alpha)$$

$$\mu \tan \alpha \ll 1 \Rightarrow \sigma_r \approx -P$$

رنگ:  $\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2k = Y$  :  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  فشاری اند

$$d\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+dr) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{dr}{r} \quad , \quad d\epsilon_r = \frac{dr}{r} \Rightarrow d\epsilon_\theta = d\epsilon_r$$

$$d\epsilon_\theta = d\lambda [\sigma_\theta - 0.5(\sigma_x + \sigma_r)] \quad d\epsilon_r = d\lambda [\sigma_r - 0.5(\sigma_x + \sigma_\theta)]$$

تشریح و کرنش ها: فشاری

$\Rightarrow \sigma_r = \sigma_\theta$  رنگ  $\Rightarrow \sigma_\theta - \sigma_r = 2k \Rightarrow P = 2k - \sigma_x$

$$\frac{d\sigma_x}{[B\sigma_x - 2k(1+B)]} = \frac{2dD}{D} \Rightarrow B\sigma_x - 2k(1+B) = D^{2B} \cdot C''$$

شرایط مرزی:  $D = D_0 \rightarrow \sigma_x = 0 \Rightarrow C'' = \frac{-2k(1+B)}{D_0^{2B}}$

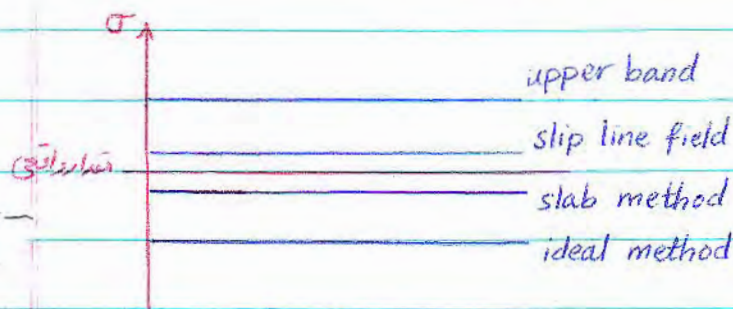
$$\Rightarrow \frac{\sigma_x}{2k} = \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{D}{D_0} \right)^{2B} \right]$$

در خروج:  $D = D_e : \sigma_x = \sigma_d : \frac{\sigma_d}{2k} = \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{D_e}{D_0} \right)^{2B} \right]$

رابطه مثل کشش تنیده است فقط، توان  $2B$  است.

مقدار  $\sigma_d$  در این روش از کارایده آل بیشتر است چون اصطکاک داریم در این روش.

روش کارایده آل حد پایینی است. (Lower Band)



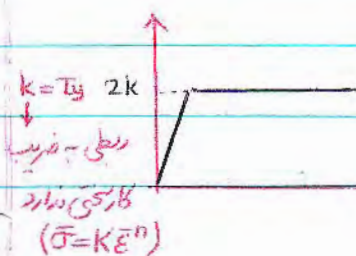
روش تختال، حد متوسط است.

86.8.27

تنش سیلان متوسط:

اگر بخواهیم کار سختی را هم در نظر (تنیده)  $\frac{\sigma_d}{2k} = \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{t_e}{t_0} \right)^B \right]$

بگیریم: لحظه به لحظه که ماده تغییر شکل می دهد، کار سختی

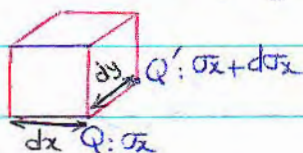


می شود که قبلاً این را در نظر نگرفتیم. کار سختی یک بحث متالورژیکی



است. تحلیل تنش، مکانیکی است.

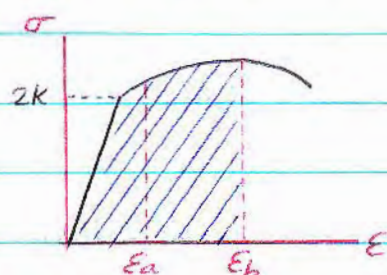
تغییرات تنش در یک بازه:



تعریف تنش در یک نقطه:



در روش تخیال می‌خواهیم کار سختی را در نظر بگیریم. یعنی بجای  $2K$  مقدار دیگری بگذاریم.



$$M.F.S = \frac{\int_{\epsilon_a}^{\epsilon_b} \sigma d\epsilon}{(\epsilon_b - \epsilon_a)} = Y_m$$

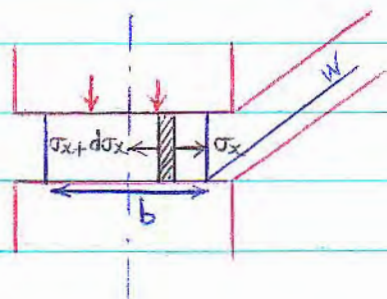
(Mean Flow Stress)

برای میله: 
$$\frac{\sigma_d}{M.F.S} = \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{D_e}{D_o} \right)^{2B} \right]$$

\* در مورد اکستروژن فقط یک تفاوتی در شرایط مرزی بوجود می‌آید.

$$\left. \begin{array}{l} \text{در ورود: } D = D_o \rightarrow \sigma_x = P_e \\ \text{در خروج: } D = D_e \rightarrow \sigma_x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{در فشار} \\ \text{اکستروژن} \end{array} \frac{P_e}{M.F.S} = \frac{1+B}{B} \left[ 1 - \left( \frac{D_o}{D_e} \right)^{2B} \right]$$

فوج یا آهن‌گری:



در این نوع شکل دهی، سنبه و سندان داریم.

هم در دهی بالا و هم در دهی پایین انجام میشود.

از روش تعادل بررسی می‌کنیم. فرض:  $w \gg b$  ← تغییرشکل دویجری plane strain

فرض دیگر: کار اضافی وجود ندارد  $\equiv$  در فوج ممکن است شبکه‌ای شدن رخ بدهد و از بخل

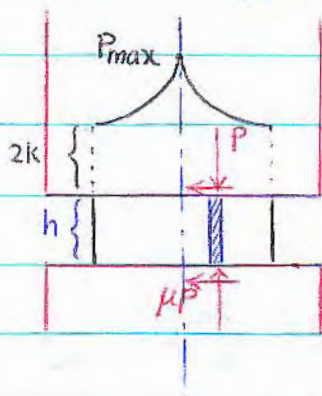
بیرون بزنند و فرض می‌کنیم شبکه‌ای نباشد.

درفزایدهای شکل دهی دو حالت داریم:

(1) steady state: هرزده وضعیت دره‌ای حلونی خود را دارد. (در حرکت کردن)

(2) Instantaneous: لحظه‌ای. مثل فوج. در هر بار انجام شدن،  $w$  و  $P$  و حالت تشق

عوض می‌شود و باید مسئله‌ای را لحظه‌ای حل کرد.



$$\sum F_x = 0: (\sigma_x + d\sigma_x)hw - \sigma_x hw - 2\mu P dx w = 0$$

$$\Rightarrow h d\sigma_x = 2\mu P dx$$

$$\sigma_z = -P \quad \text{فشاری}$$

$$\epsilon_y = 0 \Rightarrow d\lambda [\sigma_y - 0.5(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \Rightarrow \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

$$\text{ترشک: } \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2k = Y \Rightarrow \sigma_x - \sigma_z = 2k$$

$$\Rightarrow \sigma_x + P = 2k \quad \Rightarrow d\sigma_x = -dP \quad (2k = \text{cons.})$$



چون فشار منبسطه را می‌خواهیم نسبت به  $P$  معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2\mu}{h} dx$$

فشار در حسب  $x$  تغییر می‌کند:

$$\Rightarrow \ln P = -\frac{2\mu}{h} x + C \quad \text{سطح آزاد: } \sigma_x = 0 : x = \frac{b}{2} \text{ شرایط مرزی}$$

$$(\sigma_x = 0 : P = 2k) \Rightarrow C = \ln(2k) + \frac{2\mu}{h} \cdot \frac{b}{2}$$

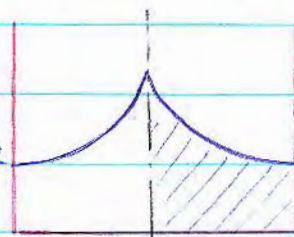
$$\Rightarrow \frac{P}{2k} = \exp\left[\frac{2\mu}{h}\left(\frac{b}{2} - x\right)\right]$$

$$\left(\frac{P}{2k}\right)_{\max} \Big|_{x=0} = \exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) \quad \text{چون تقارن داریم، در وسط، فشار max است}$$

اگر بخواهیم نیرو را بدست آوریم:

$$P_{ave} = \frac{1}{a} \int_0^a P dx \quad \left(\frac{b}{2} = a\right)$$

$$\Rightarrow P_{ave} = \frac{1}{a} \int_0^a 2k \cdot \exp\left(\frac{2\mu a}{h}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\mu x}{h}\right) dx$$



$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{-h}{2\mu} \exp\left(-\frac{2\mu}{h}x\right) \Big|_0^a \cdot 2k \exp\left(\frac{2\mu a}{h}\right)$$

$$= \frac{2k}{a} \left(\frac{h}{2\mu}\right) \left[\exp\left(\frac{2\mu a}{h}\right) - 1\right] = \frac{2kh}{\mu b} \left[\exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1\right]$$

چون  $\mu$  خیلی کوچک است در فرجه هم روغن کاری خوب انجام می‌شود تا ماده راحت

بگذرد پس  $\mu$  عملاً کوچک می‌شود. اگر  $\mu$  و  $h$  تقریباً هم اندازه باشند:

$$\left(\frac{\mu b}{h} \rightarrow 0\right) \exp(\mu b/h) = 1 + \frac{\mu b}{h} + \frac{\left(\frac{\mu b}{h}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\mu b}{h}\right)^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow P_{ave} = 2k \left(\frac{h}{\mu b}\right) \left[1 + \frac{\mu b}{h} + \frac{\left(\frac{\mu b}{h}\right)^2}{2!} + \dots - 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ave}}{2k} = 1 + \frac{\mu b}{2h} \Rightarrow F_f = P_{ave} \cdot b \cdot w : \text{نیروی لحظه‌ای}$$

برای داشتن دستگاه پرس مناسب باید نیروی لحظه‌ای در پایان کار را در نظر گرفت.

\* نریخی جاها اصطکاک ایستایی است. مثلاً برای فولاد در دمای  $1200^\circ\text{C}$  (در دمای بالا مواد

چسبیده هم می‌شوند) دیگر اینطور روغن کاری نمی‌کنیم. می‌توان از بور شیشه یا گرافیت

استفاده کرد. اما با این حال اصطکاک لغزشی نیست بلکه چسبیده است.

اصطکاک : 1- لغزنده (Sliding F.)  $T_i = \mu P$  2- چسبیده (Sticking F.)

برای برش خودقطعه تنش  $T_i$  لازم است. با فرض چسبندگی کامل (در دمای بالا) نیروی

اصطکاک می‌تواند نیز  $T_i$  خواهد بود چون اگر خوش خورده است.

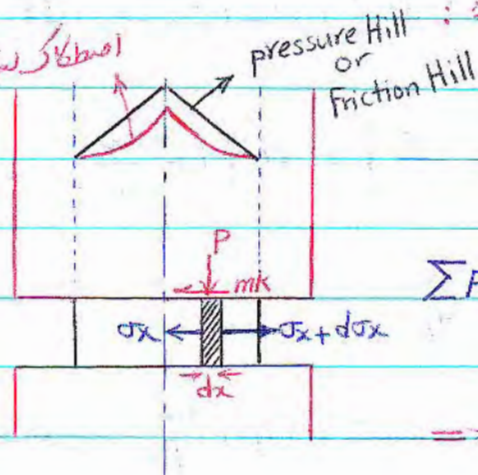
در حالت نیمه چسبیده، یک کسری از  $T_i$  را در نظر می‌گیریم:  $m T_y$  :  $m < 1$

فاکتور اصطکاک  $m$  :  $m = 1$  : کاملاً چسبیده  $m < 1$  : نیمه چسبیده

$m$  با  $\mu$  فرق می‌کند.  $m$  به سمت 1 می‌رود اما  $\mu$  به سمت کمتر یعنی صفر



فوج باکرفش صحنه‌ای و اصطکاک چسبیده : pressure Hill or Friction Hill



$$\epsilon_y = 0$$

$$0 < m < 1$$

$$\sum F_x = 0 : (\sigma_x + d\sigma_x)hw - \sigma_x hw - 2mkw dx = 0$$

$$\Rightarrow h d\sigma_x = 2mk dx$$

$$\Rightarrow dP = -\frac{2mk}{h} dx ; \quad \sigma_z = -P : \sigma_x - \sigma_z = 2k : \sigma_x + P = 2k$$

$$\Rightarrow P = -\frac{2mk}{h} x + c \quad (d\sigma_x = -dP)$$

شرایط مرزی :  $x = \frac{b}{2} : \sigma_x = 0 : P = 2k$

$$\Rightarrow c = 2k + \frac{2mk}{h} \cdot \frac{b}{2} \Rightarrow P = \frac{2mk}{h} \left( \frac{b}{2} - x \right) + 2k$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2k} = 1 + \frac{m}{h} \left( \frac{b}{2} - x \right) \quad \left( \frac{P}{2k} \right)_{\max} \bigg|_{x=0} = 1 + \frac{mb}{2h}$$

تذکره :  $0 < \mu < 1$  اما به نسبت مقادیر نزدیک صفر میل میکند

تذکره دوم : در این مسئله از معیار ترسکا استفاده کردیم. در صحنه‌ی  $x$  تنش برشی صفر است

پس  $\sigma_x$  تنش اصلی است. اما در صحنه‌ی  $z$ ، تنش برشی  $mk$  را داریم پس  $\sigma_z$  اصلی

خواهد بود. اما با تقریب آنرا اصلی فرض می‌کنیم. این تقریب در مسئله قبلی هم بود اما اینجا حتماً

$$(a = \frac{b}{2}) \quad P_{ave} = \frac{1}{a} \int_0^a P dx = \frac{1}{a} \int_0^a 2k \left[ 1 + \frac{m}{h} \left( \frac{b}{2} - x \right) \right] dx$$

$$\Rightarrow P_{ave} = \frac{2k}{a} \left[ a + \frac{ma^2}{h} - \frac{m}{h} \cdot \frac{a^2}{2} \right] = 2k \left[ 1 + \frac{mb}{4h} \right]$$

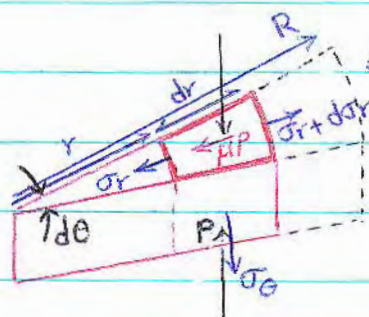
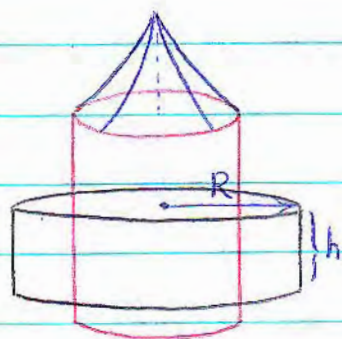
$$\Rightarrow \frac{P_{ave}}{2k} = 1 + \frac{mb}{4h}$$

در حالت لغزنده  $\left\{ \frac{P_{max}}{2k} = \exp \left( \frac{\mu b}{h} \right) \right\}$  تپه‌ی فشار، ریز تپه‌ی فشار در حالت چسبیده

است چون در حالت چسبیده نیروی بیشتری نیاز است.

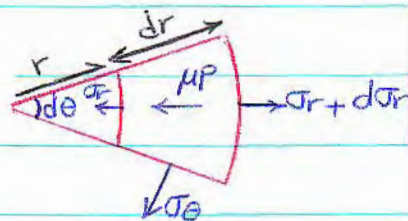
در اصطکاک چسبیده، شبکه‌ای شدن بیشتر است چون اصطکاک بیشتر است.

فرج با تقارن محوری: (Axisymmetric Forging)



مثال: فرج دنده

$$\sum F_r = 0$$



$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta h - \sigma_r r d\theta h - 2\sigma_\theta h dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$$

$$- 2\mu P \left( \frac{r d\theta + r d\theta + dr d\theta}{2} \right) dr = 0$$



$$\Rightarrow \sigma_r \cdot h \cdot dr + r \cdot d\sigma_r \cdot h - \sigma_\theta \cdot h \cdot dr - 2\mu r P dr = 0$$

$$d\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+dr) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{dr}{r} \quad d\epsilon_r = \frac{dr}{r}$$

$$d\epsilon_\theta = d\lambda [\sigma_\theta - 0.5(\sigma_r + \sigma_z)] \quad d\epsilon_r = d\lambda [\sigma_r - 0.5(\sigma_\theta + \sigma_z)]$$

$$\Rightarrow \sigma_r = \sigma_\theta$$

$$\sigma_z = -P \quad \sigma_r \text{ اصلی است اما } \sigma_z \text{ را اصلی فرض می کنیم (با تقریب)}$$

$$\xrightarrow{\text{ریسک}} \sigma_r - \sigma_z = 2k \quad (\text{Rigid Perfectly Plastic}) \Rightarrow \sigma_r + P = 2k$$

$$\Rightarrow d\sigma_r = -dP \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{2\mu}{h} dr$$

$$\Rightarrow \ln P = -\frac{2\mu}{h} r + c$$

$$\text{شرایط مرزی: } r=R : \sigma_r=0 \quad (\text{سطح آزاد}) \rightarrow P=2k \quad \text{بدون کارشکنی}$$

$$\Rightarrow c = \ln(2k) + \frac{2\mu}{h} R \quad \text{اگر کارشکنی باشد، از M.F.S استفاده می کنیم}$$

$$\Rightarrow \ln(P) - \ln(2k) = \frac{2\mu}{h} (R-r) \Rightarrow \ln \frac{P}{2k} = \frac{2\mu}{h} (R-r)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2k} = \exp\left[\frac{2\mu}{h} (R-r)\right] \quad \left(\frac{P}{2k}\right)_{\max}|_{r=0} = \exp\left(\frac{2\mu R}{h}\right)$$

برای Pave باید سطح زیرخنده را بدست آورد.

$$P_{ave} = \frac{1}{A} \int_0^R P dA$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2k \cdot \exp\left[\frac{2\mu}{h}(R-r)\right] \cdot 2\pi r dr$$

$$= \frac{4k}{R^2} \int_0^R \exp\left(\frac{2\mu R}{h}\right) \exp\left(-\frac{2\mu r}{h}\right) \cdot r dr$$

$$u=r : du=dr$$

$$dv = \exp\left(-\frac{2\mu r}{h}\right)$$

$$\Rightarrow v = -\frac{h}{2\mu} \exp\left(-\frac{2\mu r}{h}\right) \quad (u dv = uv - v du)$$

$$\Rightarrow P_{ave} = \frac{4k}{R^2} \exp\left(\frac{2\mu R}{h}\right) \left[ r \left(-\frac{h}{2\mu}\right) \exp\left(-\frac{2\mu r}{h}\right) \right]_0^R$$

$$- \int_0^R -\frac{h}{2\mu} \exp\left(-\frac{2\mu r}{h}\right) dr \Big]$$

$$= \frac{4k}{R^2} \left\{ R \left(-\frac{h}{2\mu}\right) - \left(-\frac{h}{2\mu}\right)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{2\mu R}{h}\right)\right] \right\}$$

$$\exp\left(\frac{2\mu R}{h}\right) = 1 + \frac{2\mu R}{h} + \frac{\left(\frac{2\mu R}{h}\right)^2}{2!} + \dots$$

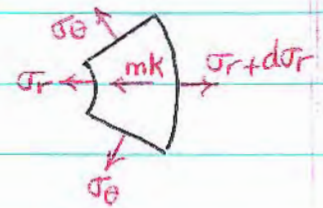
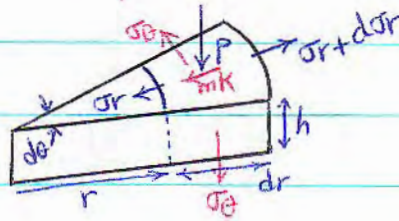
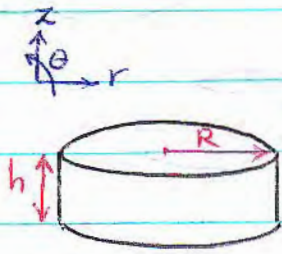
$$\Rightarrow P_{ave} = 4k \left[ \left(-\frac{h}{2\mu R}\right) - \left(-\frac{h}{2\mu R}\right)^2 \left(-\left(\frac{2\mu R}{h}\right) - \frac{\left(\frac{2\mu R}{h}\right)^2}{2}\right) - \left(\frac{2\mu R}{h}\right)^3 / 6 \right]$$

$$\Rightarrow P_{ave} = 2k \left[ 1 + \frac{2\mu R}{3h} \right]$$

از  $P_{ave}$  می توان نیروی لایتم برای پرس را بدست آورد.



فویج با تقارن محوری - اصطکاک چسبیده:



$$\sum F_r = 0 : (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)h d\theta - \sigma_r \cdot r d\theta \cdot h - 2\sigma_\theta \cdot h dr \cdot \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$- 2mk \frac{(r + r + dr)}{2} dr d\theta = 0 \quad (\epsilon_\theta = \epsilon_r : \sigma_\theta = \sigma_r)$$

$$\Rightarrow d\sigma_r = \frac{2mk}{h} dr$$

$$dP = - \frac{2mk}{h} dr \Rightarrow P = - \frac{2mk}{h} r + C \quad \text{شرایط تسلیم:}$$

$$\text{شرایط محوری: } r=R \rightarrow \sigma_r = 0 : P = 2K \quad \sigma_z = -P$$

$$\Rightarrow C = 2K + \frac{2mk}{h} R$$

$$\Rightarrow P = \frac{2mk}{h} (R - r) + 2K$$

$\sigma_z$  با تقریب تنش اصلی فرض میشود.

این تقریب خیلی خوب نیست چون  $mk$  بزرگ است. معیار تروسکا:

$$\sigma_r - \sigma_z = 2K$$

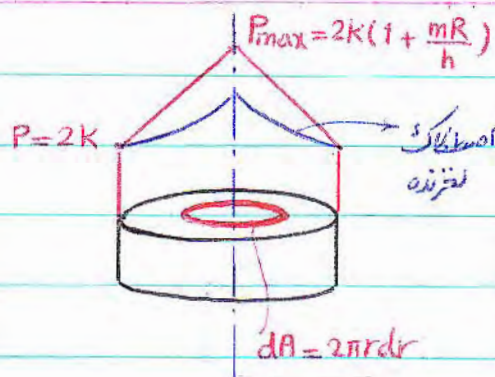
$$\sigma_r + P = 2K : d\sigma_r = -dP$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2K} = 1 + \frac{m}{h} (R - r) \quad ; \quad \frac{P_{\max}}{2K} = 1 + \frac{mR}{h}$$

$$P_{\text{ave}} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R P (2\pi r dr) = \frac{2}{R^2} \int_0^R 2K \left[ 1 + \frac{m}{h} (R - r) \right] r dr$$

$$= \frac{4K}{R^2} \left[ \frac{R^2}{2} + \frac{mR^3}{2h} - \frac{mR^3}{3h} \right]$$

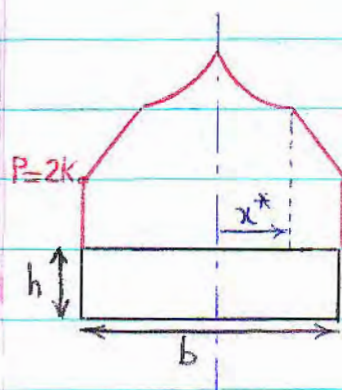
$$\Rightarrow \frac{P_{ave}}{2K} = 1 + \frac{mR}{3h}$$



اگر هم اصطکاک لغزنده و هم اصطکاک چسبیده داشته باشیم: (صفحه ۱۴۴ کتاب)

می توان گفت که در لبه ها، اصطکاک لغزنده و در وسط چسبیده است. از جهتی می توان

گفت روغن از لبه ها بیرون می زند و در لبه ها چسبیده می شود.



\* در حالت فورج با گردش صفحه ای:

$$dP = -\frac{2mk}{h} dx$$

$$P = -\frac{2mk}{h} x + c$$

$$x = x^*: \quad P = 2K \exp\left(\frac{2\mu x^*}{h}\right) \quad c = 2K \exp\left(\frac{2\mu x^*}{h}\right) + \frac{2mk}{h} x^*$$

$$\Rightarrow P = \frac{2mk}{h} (x^* - x) + 2K \exp\left(\frac{2\mu x^*}{h}\right) \quad \left(x = \frac{b}{2} : P = 2K\right)$$

$x^*$  درست می آید

این رابطه برای قسمت خیلی متورار است یعنی برای  $x > x^*$

$$\frac{P_{ave}}{2K} = \frac{1}{a} \left\{ \int_0^{x^*} \exp\left(2\mu \frac{x}{h}\right) dx + \int_{x^*}^a \left(\frac{m}{h} (x^* - x) + \exp\left(2\mu \frac{x^*}{h}\right)\right) dx \right\}$$

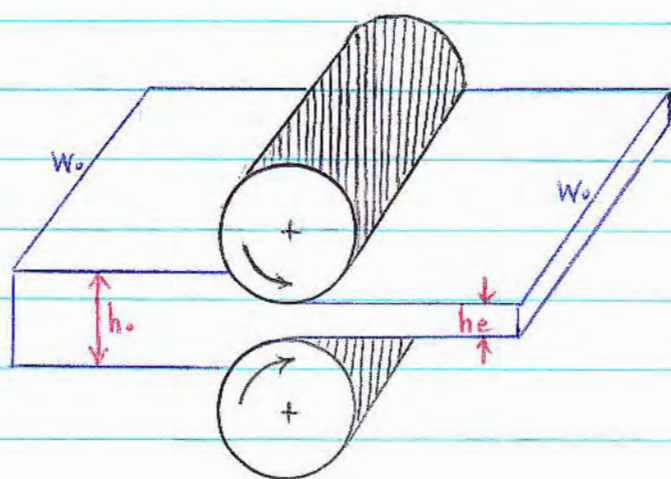
$(a = \frac{b}{2})$



## نورد : (Rolling)

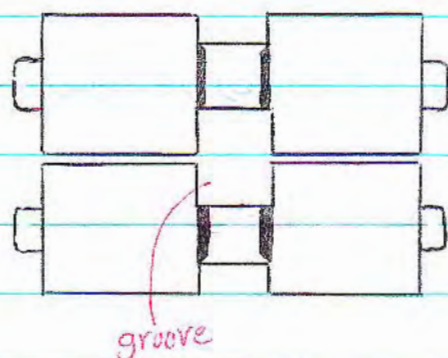
مهم ترین فرایند شکل دهی، نورد است. بیش از 85 درصد تغییر شکل فلزات در حالت جامد، از طریق نورد است.

الف - نورد تخت      ب - نورد مقاطع      پ - نوردهای ویژه



شرایط کرنش صفحه ای

(spreading) بدون تعریف



شرایط کرنش صفحه ای

حاکم نیست و همراه تعریف

بی باشد. عرض ماده باید کمتر از groove باشد چون تعریف داریم. در نورد مقاطع

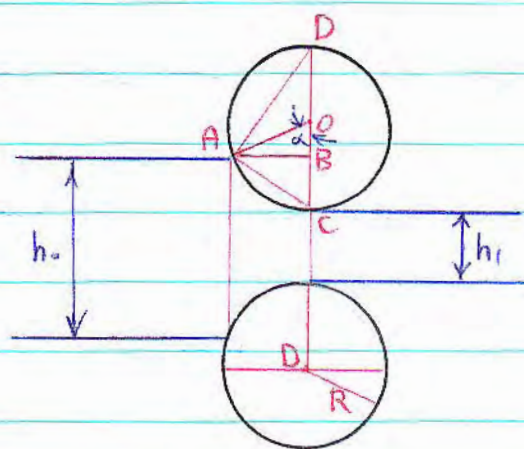
طراحی کالبر داریم (Roll Pass Design). ریل راه آهن، تنه راه تولیدش، همین نورد مقاطع است.

پ - یک استوانه‌ی توخالی را به یک رینگ تبدیل می‌کنند. (عرض زیاد ضخامت کم)

86.9.6

اصول محاسبات نورد:

فرض: برگشت پذیر است یعنی می‌تواند دوباره برگردد.  $\alpha$ : طول قوس مماس



$$h_0 = h_1 + 2\overline{BC}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{R} = \frac{\overline{OC} - \overline{BC}}{R} = 1 - \frac{\overline{BC}}{R}$$

$$\overline{OA} = R \Rightarrow \overline{BC} = R(1 - \cos \alpha)$$

$$h_0 - h_1 = 2\overline{BC} = 2R(1 - \cos \alpha) = \Delta h$$

$\Delta h$ : کاهش ارتفاع

چون عرض به ضخامت زیاد است، plane strain داریم.

$$1 - \cos \alpha = \frac{\Delta h}{2R} : \cos \alpha = 1 - \frac{\Delta h}{D}$$

$\alpha$ : زاویه‌ی گازگیری

$$(\overline{AC} = L)$$

با تقریب: طول منطقه‌ی تغییر شکل  $\widehat{AC} \cong L$

$\alpha$  در واقع خیلی کوچک است. (نورد سرد:  $\alpha \sim 8^\circ$  - نورد داغ:  $\alpha \sim 15-20^\circ$ )

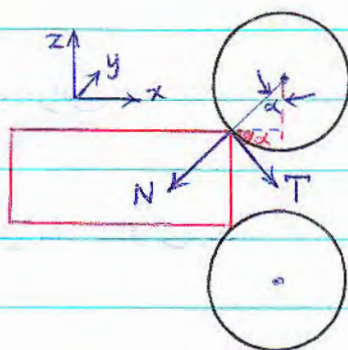
$$\triangle ABC \sim \triangle DAC : \frac{\overline{BC}}{L} = \frac{L}{\overline{DC}} \quad L^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DC} = \frac{\Delta h}{2} \cdot 2R = \Delta h \cdot R$$



$$\Rightarrow L = \sqrt{\Delta h \cdot R}$$

به غیر از لحظه اول این فرایند steady state است چون شرایط هرززه با ذرات

بعری یکسان است. اما در لحظه اول:



$$\sum F_x = 0: T \cos \alpha - N \sin \alpha = 0$$

برای اینکه نورد انجام شود:

$$T \cos \alpha \geq N \sin \alpha \quad ; \quad T = \mu N$$

$$\Rightarrow \mu \cdot N \geq N \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \mu \geq \tan \alpha$$

یعنی نورد بدون اصطکاک امکان پذیر نیست. اگر  $\mu < \tan \alpha$  باشد، این تسخه وارد

دو استوانه نمی شود.

$$h_0 \Delta x_0 W = h_1 \Delta x_1 W \xrightarrow{\div t} h_0 \overset{\text{سرعت}}{\uparrow} v_0 = h_1 \overset{\text{سرعت}}{\uparrow} v_1$$

چون حجم ثابت است:

$$h_0 > h_1 \rightarrow v_1 > v_0$$

یعنی سرعت در خروج از سرعت در ورود بیشتر است:

اما سرعت غلنگ ثابت است. (سرعت زاویه ای آن (w) ثابت است) پس تفاضل

نقطه (h<sub>n</sub>) در مسیر تماس وجود دارد که سرعت آن با غلنگ یکسان است.

قبل از این نقطه : سرعت غلنگ  $V <$  ماده  $* h > h_n$

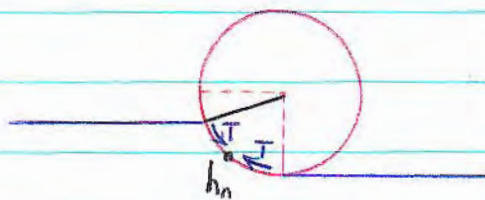
قبل از این نقطه سرعت نسبی ماده به سمت عقب است. پس  $T$  به سمت

جلو خواهد بود. (یعنی همان جفتی که گذاشتیم.)

بعد از این نقطه : سرعت غلنگ  $V >$  ماده  $* h < h_n$

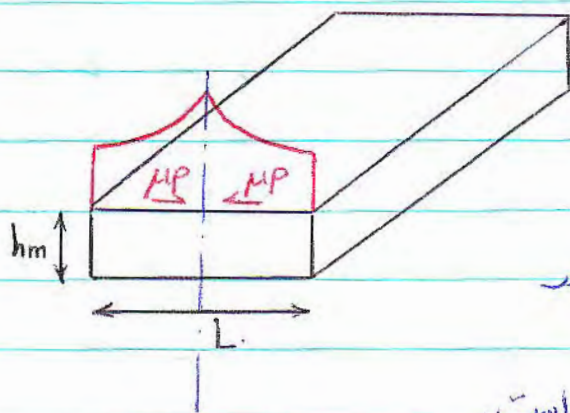
یعنی ماده جلویی ریزد.

$h_n$  : نقطه ی خنثی. پس اصطکاک در طول مسیر متغیر است. (دوگانه)



جفت اصطکاک : به سمت  $h_n$ .

تشبیه سازی با فوج :



درفوج مسئله لحظه ای بود.

سمت راست ، اصطکاک به سمت چپ در

سمت چپ ، اصطکاک به سمت راست است.

نقطه ی خنثی در مورد الزاماً وسط نیست اما در فوج وسط است.



پس برای محاسبه‌ی نورد از فورج استفاده می‌کنیم:

فورج با کرنش صفحه‌ای:  $\frac{P_{ave}}{2k} = 1 + \frac{\mu L}{2h_m}$  ;  $h_m = \frac{h_0 + h_1}{2}$  ,  $L = \sqrt{R \Delta h}$

$2k \equiv M.F.S$  (طبق معیار ترسکا)

در نورد داغ، حين فرايند recovery نيز انجام مي‌شود.

در دمای بالا نمی‌توان روغن استفاده کرد در نتیجه اصطکاک چسبنده خواهد بود.

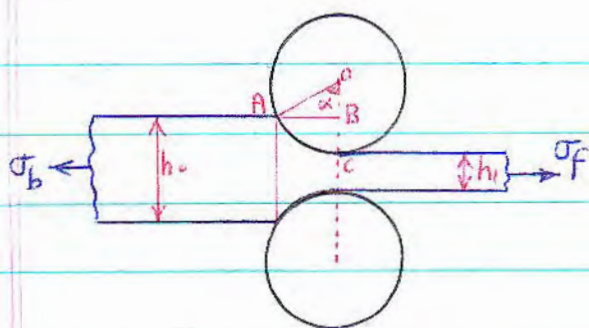
روغن کاری انجام می‌دهیم اما باید این شرط هم رعایت شود:  $\mu \geq \tan \alpha$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\Delta h}{D}$$

نیروی غلنگ:  $F_R = Y_m \cdot L \cdot W$  کار ایده‌آل:

نیروی نورد:  $F_R = Q \cdot Y_m \cdot L \cdot W$  : ضرایب بازده

$Q = 1.2$  یعنی 20٪ تلفات در نورد { از انرژی نورد بازدهی بالاست }



$$\tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{L^2 - (\Delta h/2)^2}}{(R - \Delta h/2)}$$

$\Delta h$  کوچک است.

$$\tan \alpha \approx \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{R \Delta h}}{R} = \sqrt{\frac{\Delta h}{R}}$$

$$\mu \geq \tan \alpha \quad \rightarrow \quad \text{حالت مساوی: } \mu = \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \Delta h_{\max} = \mu^2 \cdot R \Rightarrow \Delta h_{\max} = R \mu^2$$

$\Delta h_{\max}$ : حداکثر reduction در یک پامپ. در اکستروژن reduction های بزرگ

داریم. اما در نورد هر مقداری reduction امکان پذیر نیست.

\* آیا هر ورق نازک را می توان نورد کرد؟

خیر. حداقل ضخامتی که می توان نورد کرد:

$$h_{\min} = \frac{c \mu R}{E'} (\sigma_0 - \sigma_t)$$

$$R: \text{شعاع غلتک} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{مشخصات غلتک})$$

$c$ : مربوط به جنس ورق.

در نورد می توان یک کشش به سمت جلو داشت ( $\sigma_p$ ) و یا یک کشش به سمت عقب

$$\sigma_t = \frac{\sigma_p + \sigma_b}{2} \quad (\sigma_b): \text{در این صورت بار وارد بر غلتک کم می شود.}$$

$\sigma_0$ : کشش سیلان ماده که برای نولاد بزرگ است پس دسترسی به foil نازک فولاد

مشکل است. نورد مناسب فولاد:  $\sigma_0 \downarrow, \sigma_t \uparrow, R \downarrow, \mu \downarrow, E' \uparrow$ .

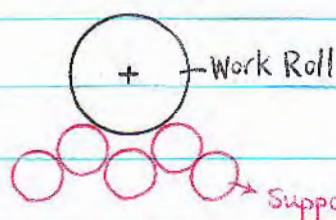


در رابطه‌ی قبلی دیدیم که مطلوب‌ست برای  $h_{min}$  قطر غلتک کوچک باشد. در این صورت



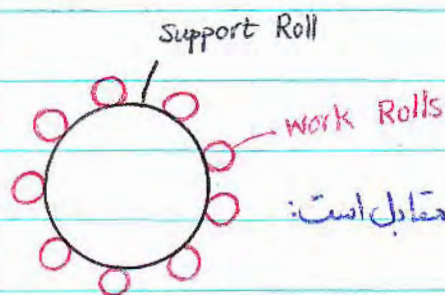
چون طول غلتک زیاد است، خنثی روی می‌دهد.

در این صورت از غلتک‌های Support استفاده



می‌کنیم که مانع از خنثی غلتک اصلی می‌شود. این

مطالب برای نورد ورق‌های نازک (foil) است. غلتک‌های Support به موتور وصل



نیستند.

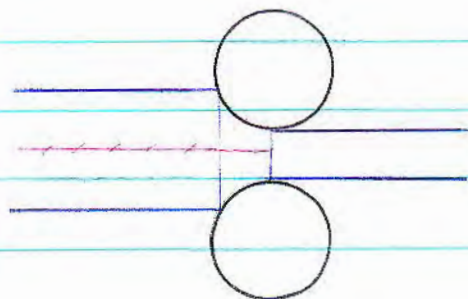
راه دیگر برای نورد فویل استفاده از غلتک‌هایی بصورت مقابل است:

برای کم کردن  $h_{min}$  راه‌های دیگری هم هست؛ مثلاً دو فویل نازک را روی هم قرار داده و

نورد می‌کنیم بطوریکه به هم نچسبند. سطح مابین ورق‌ها را خنثی می‌کنیم تا بعد از نورد به هم

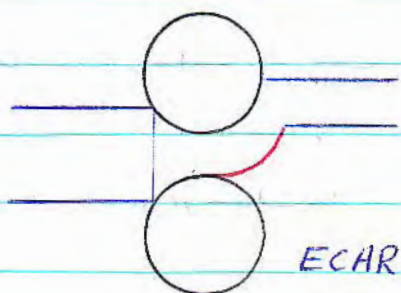
جوش نخورند. بعد از  $n$  سیکل،  $2^n$  لایه داریم. با این کار همان ایجاد اولیه را داریم اما

استحکام آن بالا رفته (ساختار ریزانه) (ARB)

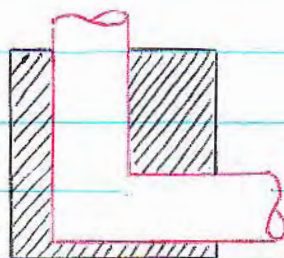


اما با این کار درصد تخصیص طول کم می‌شود.

روش های دیگر برای بالا بردن استحکام:



ECHAR



ECAP

\* در نورد ورق ها ممکن است غلنگ تخت شود (بصورت الاستیک) . در این صورت

شعاع  $R'$  از  $R$  بزرگتر می شود (در اثر فشاری که به غلنگ از پائین وارد می شود).

$$(R' > R) \quad R' = R \left( 1 + \frac{16 F_s}{\pi E' \Delta h} \right) \quad , \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$F_s$ : نیروی جدا کننده ی غلنگ ها       $\Delta h$ : میزان reduction

شبیه به فرمول فورج: 
$$P_s = \frac{h_m}{\mu \sqrt{R' \Delta h}} \left( \exp\left(\frac{\mu \sqrt{R' \Delta h}}{h_m}\right) - 1 \right) (2K - \sigma_t)$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_f + \sigma_b}{2}$$

$$(F_s = P_s \times \sqrt{R' \Delta h})$$

با دو معادله ورود مجهول  $F_s$  و  $R'$

بدست می آید. اگر معادله جواب ندهد یعنی نورد امکان ندارد.

در نورد سرد flattening زیاد است اما در نورد داغ کمتر.

تخت شدن غلنگ: Roll Flattening



عیب های ترورد:

غلطک ها صاف باقی نمی ماند و بدلا یلی که گفته شد برای آن دو حالت اتفاق می افتد:



در نتیجه محصول بصورت

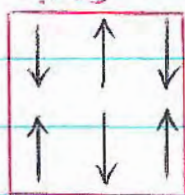


(1)

خواهد شد . در این صورت تنش های باقیمانده

خواهیم داشت . در لبه ها reduction بیشتر است . لبه ها طولانی تر بوده و می خواهد

تصور از بالا



وسط را کم بکشد و وسط که کوتاه تر است می خواهد لبه ها را بزرگ کند .

این تنش های فشاری در ورق buckling ایجاد می کند پس

لبه ی ورق موج دار می شود . در وسط هم که کشش داریم ممکن است پارگی ایجاد شود

راه حل : بشکاف ای کردن غلطک ها .

در نتیجه محصول

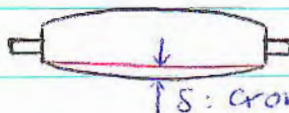


می شود



(2)

تنش های پسماند برعکس بالائی میشود .



S: crown

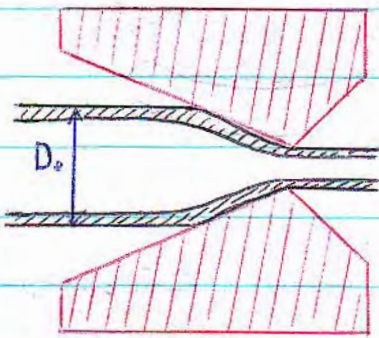
برای رفع این دو مشکل باید تا حد اپتیممی غلطک ها بشکاف ای بشوند . تا در اثر

مشکل بالا ، غلطک صاف شود .

## کشش لوله : Tube Drawing

مثل کشش سیم است اما توخالی.

### ۱- کشش بدون ابزار داخلی (Sinking) :



کنترلی روی قطر داخلی نداریم و بسته به سرعت کشش

و جنس لوله می تواند تغییر کند. یکی از عیوب در این روش:

قطر خارجی دایره است اما قطر داخلی معلوم نیست چه شکلی دارد. در لوله های انتقال

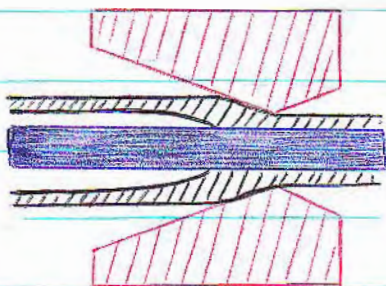


سیال اگر سطح داخلی اینطور باشد، Erosion رخ می دهد.

در واقع خوردگی فلز در اثر برخورد های فیزیکی. لوله های انتقال

گاز Seamless Tube هستند یعنی بدون درز جوش.

### ۲- کشش با کنترل داخلی : (Mandrel)



طول محدودیت می یابد و هر چقدر راغبتان کشید.

حد Mandrel نباید تغییر ابعاد دهد مگر

الاستیک. طول این میله هم محدود است





$$\sum F_x = 0 : \sigma_x \pi D h - (\sigma_x + d\sigma_x) \pi D (h + dh) - P \pi D ds_1 \sin \alpha$$

$$- \mu_1 P \pi D ds_1 \cos \alpha + P \pi D ds_2 \sin \beta - \mu_2 P \pi D ds_2 \cos \beta = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma_x dh - h d\sigma_x - P dx \tan \alpha - \mu_1 P dx + P \tan \beta dx - \mu_2 P dx = 0$$

$$\overline{BE} = \overline{EF} + \overline{BF} = h + dx \cdot \tan \alpha$$

$$\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = h + dh + dx \cdot \tan \beta$$

$$\Rightarrow dh = dx (\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$\Rightarrow -\sigma_x dh - h d\sigma_x - P dx (\tan \alpha - \tan \beta) - P dx (\mu_1 + \mu_2) = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma_x dh - h d\sigma_x - P dh - P dh \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta} = 0$$

$$\Rightarrow h d\sigma_x + [P(1 + B^*) + \sigma_x] dh = 0 \quad ; \quad B^* = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_r \rightarrow \sigma_\theta = \sigma_r$$

$$\sigma_x - \sigma_r = 2k \Rightarrow \sigma_x + P = 2k \quad ; \quad \sigma_r = -P \quad \text{با تقریب}$$

شرایط مرزی: در فول آن مثل تسمه است؛ اگر باز شود، تسمه خواهد شد:

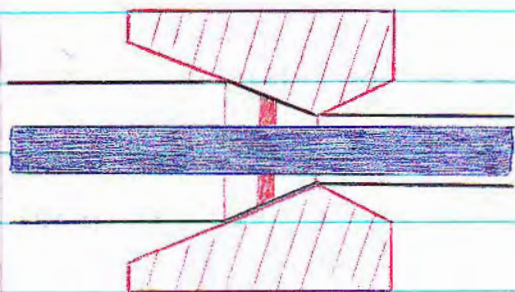
$$h = h_a \rightarrow \sigma_x = \sigma_a$$

$$h = h_b \rightarrow \sigma_x = 0$$

$$\frac{\sigma_x}{2k} = \frac{1+B^*}{B^*} \left[ 1 - \left( \frac{h}{h_b} \right)^{B^*} \right] \Rightarrow \frac{\sigma_a}{2k} = \frac{1+B^*}{B^*} \left[ 1 - \left( \frac{h_a}{h_b} \right)^{B^*} \right]$$



کشش لوله اما اندرل:



رابطه‌ی آن Plug است فقط:

$$B^* = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\tan \alpha}$$

( $\beta=0$ ) چون ماده نمی‌تواند با سرعت میل حرکت کند.

درجهت افقی ( $\beta=0$ ) اصطکاک به سمت راست است چون ماده به عقب پس

زده می‌شود. در واقع ماده روی ماندرل سرعت نسبی رو به عقب دارد.

- |                                             |                              |
|---------------------------------------------|------------------------------|
| 1- به بعدی تنش و کرنش                       | } Bulk Forming (شکل دهی حجی) |
| 2- دفرمیشن های فشاری                        |                              |
| 3- بجز موارد کشش در دمای بالا انجام می‌شوند |                              |
| 4- سرعت تولید و نرخ کرنش بالا               |                              |

شکل دهی فلزات

Sheet Forming (شکل دهی ورق)

کشش تسمه Bulk Forming است. برای اینکه ماده را به کنیم عمدتاً فشاری و در دمای

فوق، نورد، کشش لوله و اکستروژن. ورق در مرحله‌ی نورد Bulk Forming است اما

در مراحل بعدی Sheet Forming خواهد بود. در موارد کشش Bulk Forming دمای

فرایند پائین است. دردهای بالا احتمال پارگی وجود دارد. اما نرخ ذایغ انجام می شود.

در کشش Bulk Forming نرخ کرنش خیلی بالاتر است اما نرخ با سرعت  $200 \frac{m}{s}$  هم انجام شده است.

### \* Sheet Forming :

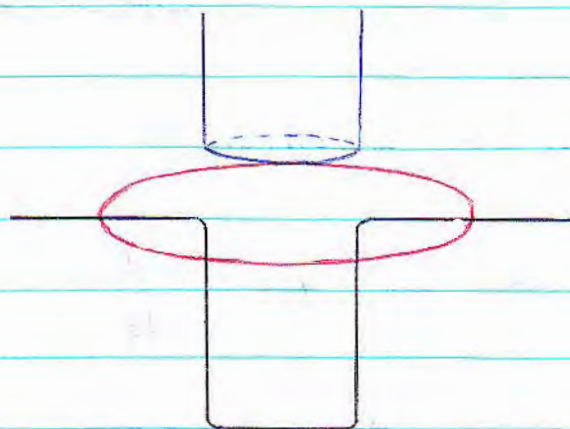
- 1- دوبجری بودن کشش (کشش در راستای منطامیت صفر است)
- 2- کشش ها عمدتاً کششی هستند: در پهن ورق، کشش دوبجری کششی داریم.
- 3- دردهای پائین انجام می شوند: بعد از آن ممکن است آنبیل شوند.
- 4- سرعت تولید کم است و نرخ کرنش متوسط است.

### \* شکل دهی ورق :

- 1- کشش عمیق (Deep Drawing)
- 2- کشش دوبجری (Stretch Forming)
- 3- خم کردن ورق (Bending): یک جا کشش و یک جا انحناء
- 4- سوراخ کاری: ورق سوراخ می شود؛ سوراخ برای معاری آب و روغن



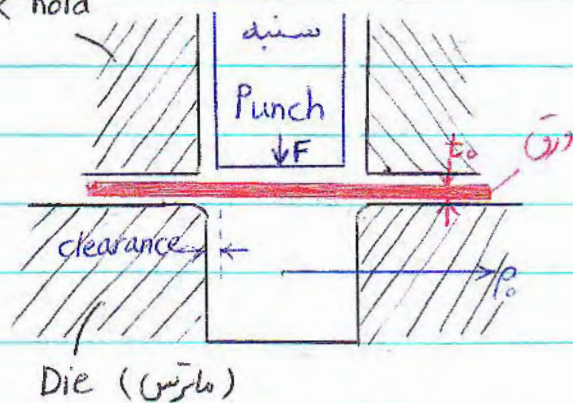
کشش عمیق :



برای تولید پارچ ، cup

از این روش استفاده می شود

blank hold

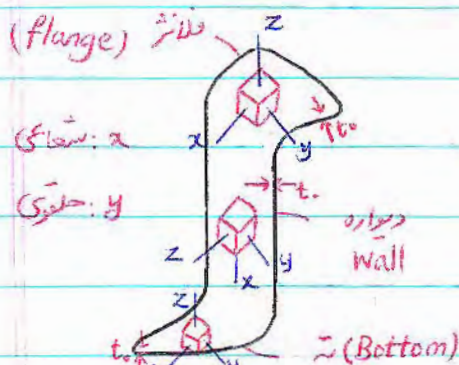


(بدون درز جوش)

(blank گرد است)

فرض : Gap با اندازه ی ضخامت ورق است.

در راستای ضخامت فشاری وجود ندارد . (در راستای z)



فرض 1. قسمت چسبیده به سنبه ، ورق تغییر شکل نمی دهد

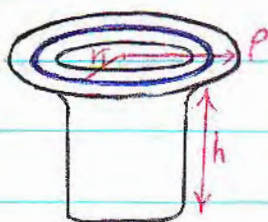
فرض 2. ضخامت ورق تغییر نمی کند.

توجه به قسمت فلانژ بدلیل میزان Gap است اما در دیواره بطور تقریبی فرض می کنیم ضخامت

ثابت است.

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 & \sigma_y < 0 & \sigma_x > 0 \\ d\epsilon_z = 0 & d\epsilon_x = -d\epsilon_y \end{cases}$$

الف - تغییر شکل فلانژ :



حجم ثابت است:

$$\pi r_o^2 t_o = \pi r^2 t_o + 2\pi r_i t_o h$$

تغییر فشار

$$0 = 2p dp + 2\pi r_i dh \Rightarrow p = -\frac{r_i dh}{dp}$$

$$d\epsilon_y = \frac{2\pi(p+dp) - 2\pi p}{2\pi p} = \frac{dp}{p} \quad \& \quad d\epsilon_y = -d\epsilon_x = \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow d\epsilon_x = \frac{r_i dh}{p^2}$$

فرض 3. این تنش ها اصلی اند؟

$$dw = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z = (\sigma_x - \sigma_y) d\epsilon_x \quad \text{کار پلاستیکی انجام شده}$$

$$dz=0 = d\lambda \left[ \frac{\sigma_z}{2} - 0.5(\sigma_x + \sigma_y) \right] \Rightarrow \sigma_x = -\sigma_y$$

$$\text{تنش سیلان ماده در فلانتر:} \quad \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 2K = \sigma_f \quad (\text{فولکس})$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \quad \& \quad \sigma_{\min} = \sigma_y$$

$$dw = \sigma_f d\epsilon_x = \sigma_f \frac{r_i dh}{p^2}$$

$$\text{کل کار پلاستیکی:} \quad dW = dw \times V \text{ حجم الی } = dw \cdot 2\pi p dp t_o$$

$$dW = 2\pi p dp t_o \cdot \sigma_f \cdot \frac{r_i dh}{p^2} \Rightarrow \frac{dW}{dh} = 2\pi r_i t_o \sigma_f \frac{dp}{p}$$

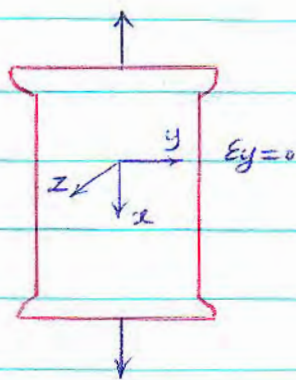
نیروی سلبه در لحظه اول max است چون در لحظات بعدی مقداری کمتر صفحه blank!



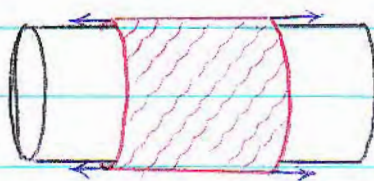
راجایی می کند.  $F_{max} = \left( \frac{dW}{dh} \right)_{max} = \int_{p_1}^p 2\pi r t_0 \sigma_f \frac{dp}{p} \quad (p_1 = r_1)$

$$\Rightarrow F_{max} = 2\pi p_1 t_0 \sigma_f \ln \frac{p_0}{p_1} = 2\pi r_1 t_0 \sigma_f \ln \frac{d_0}{d_1}$$

ب - تغییر شکل در دیواره :



مثل حالت زیر است :



حالت تنش : کشش با کرنش صفیحه ای  $d\epsilon_y = 0 : d\epsilon_x = -d\epsilon_z$

تنش سیلان ماده در دیواره  $\sigma_x = \sigma_w$  : شرط تسلیم

$F_{max}$  در لحظه اول اتفاق می افتد.  $F_{max} = \sigma_w \cdot 2\pi r_1 \cdot t_0$

$(F_{max})_{دیواره} = (F_{max})_{فلانژ} \Rightarrow \sigma_w 2\pi r_1 t_0 = \sigma_f 2\pi r t_0 \ln \frac{d_0}{d_1}$

برای مواد اینر و ترپ تنش سیلان در تمام  $\Rightarrow \ln \frac{d_0}{d_1} = \frac{\sigma_w}{\sigma_f}$

جهت یکی است.  $\frac{d_0}{d_1} = L.D.R$  (Limit Drawing Ratio) <sup>نسبت حد کشش</sup>

$$\ln(L.D.R) = \frac{\sigma_w}{\sigma_f} = \beta$$

برای ماده‌ی ایزوتروپ،  $\beta = 1$  است: (بهترین حالت)  $L.D.R = 2.7$

اگر  $\ln(L.D.R) = \eta \beta$  باشد: ( $\eta$ : راندها)

در این حالت اگر ماده ایزوتروپ بوده ( $\beta = 1$ ) و  $\eta = 80\%$  در نتیجه:  $L.D.R = 2.2$

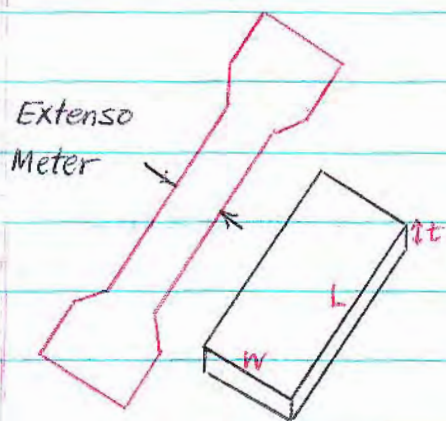
$\eta \neq 1$ : مقداری از انرژی صرف کار اضافی و اصطکاک می‌شود.

نسبت حدکشش ( $L.D.R$ ) در صنعت بطور متداول 2 است.

anisotropy

\* ان ایزوتروپی :

در Sheet Forming خیلی مهم است برخلاف Bulk Forming.



ایزوتروپ:  $\epsilon_w = \epsilon_t$

$$R = \frac{\epsilon_w}{\epsilon_t} \quad \text{ایزوتروپ}$$

$R = 1$ : isotrop       $R \neq 1$ : anisotrop

R-value مقدار anisotropy ماده را تعیین می‌کند.

$$\beta = \frac{\sigma_w}{\sigma_f}$$

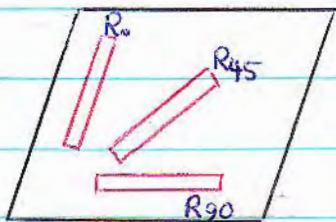
$$\beta = \sqrt{\frac{R+1}{2}}$$

$R > 1 \rightarrow \beta > 1 \rightarrow L.D.R > 2$  ;       $R < 1 \rightarrow \beta < 1 \rightarrow L.D.R < 2$



مشکل عددی ورق A1 این است که :  $L.D.R < 2$  برای همین است که برای

بدنه‌ی خودرو از ورق A1 استفاده نمی‌شود.



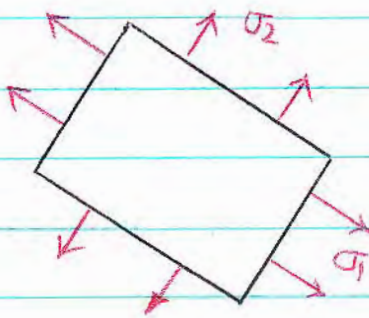
محاسبه‌ی دقیق تر  $R$  :

$$\bar{R} = R_m = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4}$$

و بعد روی اینکه  $\bar{R} > 1$  یا  $\bar{R} < 1$  بحث می‌کنیم.

Stretch Forming

کشش اتمای (کشائی) :



می‌تواند نامتوازن باشد.

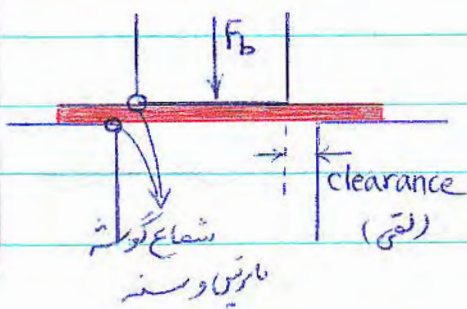
دو محور تنش صفحه‌ای :

In-plane stress  
Out-plane stress

86 . 9 . 20

Blanking

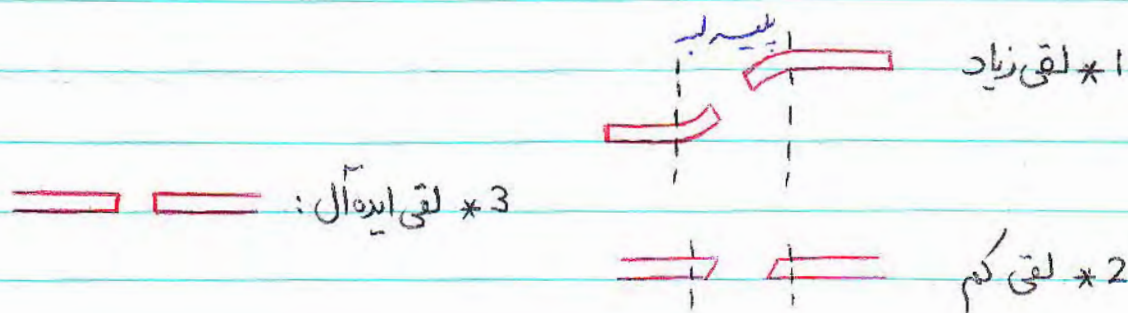
سوراخ کاری :



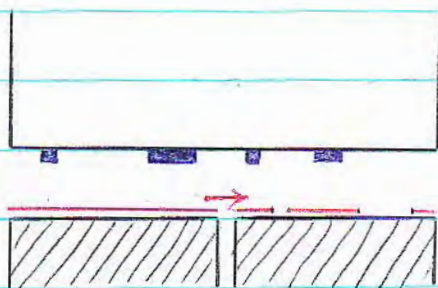
clearance = f (فاکتور جنس، ضخامت ورق، جنس ورق)

$$F_b = (\pi D t) T_y$$

استحکام برشی:  $T_y$  قطر گرده:  $D$  ضخامت:  $t$



progressive die :



با یک بار پرس کردن، در دو مرحله یا

بیشتر سوراخ کاری انجام می شود

در مورد deep drawing هم این وجود دارد. اگر تمام die ها در یک مرحله قرار گیرند

چون اصطکاک بین ورق و die زیاد میشود ممکن است ورق در مرحله پرس گیر کند.

و سنبه بالا برنگردد. پس طی چند مرحله انجام می شود

در مورد فوج هم چند مرحله ای بدین صورت وجود دارد. منطقه ای تغییر شکل پلاستیک

همان ناحیه ی برش است در نواحی اطراف دیگر کار سختی نداریم.

تا این جا اصول محاسبات به پایان رسید.



Metals Handbook: منبع

فرایندها:

فرایندهای شکلی دهی ورق: (Sheet Forming)

1. Roll Forming :

با Rolling فرق می کند. (Bulk Forming)



Idle Roll (≠ work Roll)

ورق خم می شود (Bending)

باید جوش داده شود

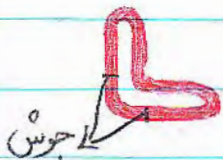


در نهایت لوله درز جوش بدست می آید.

لوله های آب که از فولاد کم کربن تولید می شوند

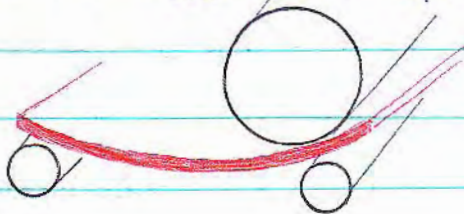
از این روش است.

پروفیل ها که توخالی هم از این روش تولید می شوند. سرعت تولید در این روش بالاست.



لوله های بزرگ مثل انتقال نفت نیز از این روش تولید

می شوند در این مورد غلتک ها باید قطر بزرگ در کل طول ورق داشته باشد و دیگر غلتک ها

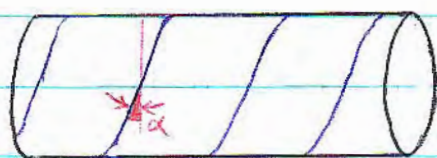


کوچک وجود ندارد.

با این روش لوله با قطر بیش از 70<sup>cm</sup> نمی توان تهیه کرد. چون ورق که به روش فورم تولید

می شود، عرض بیش از 2<sup>m</sup> ندارد.

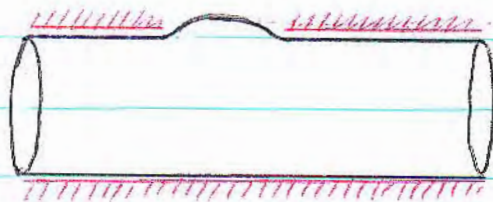
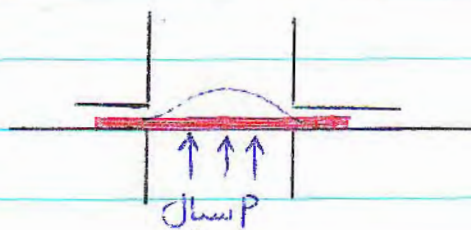
اما برای لوله های بزرگتر، ورق باید در یک مجرای مارپیچی



قرار گیرد:

$\alpha$ : تعیین کننده قطر دهانی

2. Hydro Forming :



در مورد لوله فقط این روش جواب می دهد. بهتر است در جوش وجود نداشته باشد. توسط

قالب هایی اطراف لوله مانده می داریم و در لوله هم بسته است. توسط فشار سیال منطقه ای

فوق تغییر فرم می دهد. این هم Sheet Form است در شاخه stretch.

لوله های منی فولد (درود و خرم گاز) در کشور های پیشرفته از این روش است.

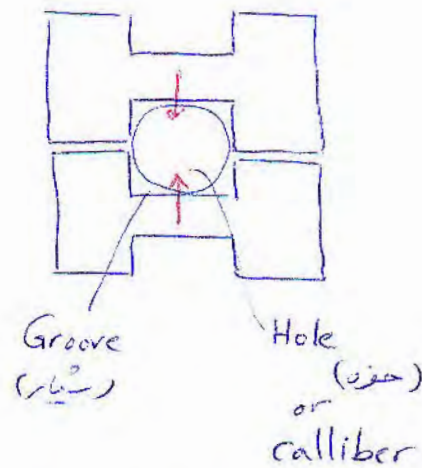


طراحیها:

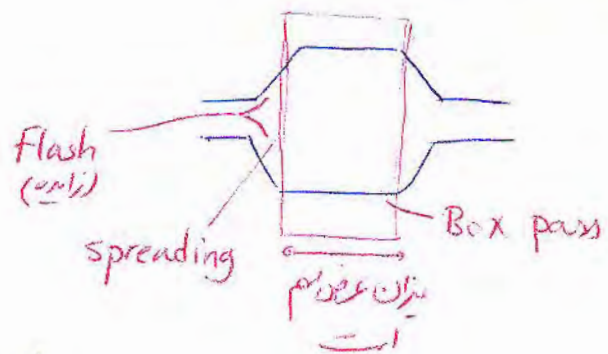
نقشه: تحت مقاطع عرضی

نقشه مقاطع:

معمولاً برای طرح کردن شکل صفاً حکم نیست. باید به صورتی که یک ورق قالب را داشته باشیم.



در جهت طراحی (معمولاً برعکس) کشیده می‌شود. در بعضی هم می‌شود. به طراحی این کالیبر هم است تا از بعضی چیزها نتواند.



در حالت غیر strain method یا slab method است. استاکینگ

از بعضی بیرون نهد، چون بزرگ است، در هر سیور در جایی که نورد مقاطع تقریباً همیشه بصورت داغ انجام می‌شود. تا حدی که در هر دو طرف که

در نورد گت برابر طولی از Deflection یا انحراف عتکها

از Roll support استفاده می‌شود:

Two High



Four High



هم چنین برای بزرگتری از اندازه عتکها، از طراحی Crown هم استفاده می‌شود. برای رفع صافی و صاف کردن ورق: بهج دراز کردن (یعنی تخت کردن استوانه‌ای از عتک بکند از استفاده می‌شود) در هر ورق نازک یا ورق نیز قبلاً صفت می‌شود. که از عتکهای support برای استفاده می‌شود.

در نورد تحت معمولاً طرح صفاً حکم است.

plate: یکی از صفحات 2

sheet: کمتر از 1 تا 1 mm (trip)

Thin sheet: زیر 1 mm (ورق نازک)

3 Feil

در این جهت به عرض صفحات کمتر برز است. که در بعضی از می‌شود.

در ورق گت ورق تغییر شکل جانبی (تخلخل) و spreading



reduction: ریزش رانم. در صورت غلط

بدون طراحی کالیبر، Flash (ایر بر بزرگ)

که در رانم بعضی شکل زائده. پس هم برز

بطلب در نورد مقاطع حتی کالیبر سرن است

Roll pass Design

که چند رانم یا رانم و رانم تغییر شکل در هر ورق

P(2)

Roll pass design

1- پاس ها شدن اولیه : فقط کاهش مقطع انجام می شود

2- پاس ها نهایی : ایجاد کشیدگی شکل اصلی (Leader)

خود این مقطع، چندین زیرمجموعه دارد

3- پاس ها نهایی : (finishing) معمولاً 2 تا 3 هسته

ابعاد دقیق نهایی از روش های دیگری برآیند می آید

(برای تولید تیر آهن) پاس ها شدن : 

Finishing :  شعاع این لبه را هم ایجاد می کنند.

فریت نورد : سرعت تولید بالا + هزینه های اولیه ناگرم

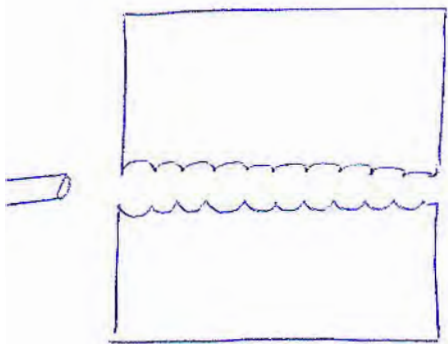
در اکثر دژن طراحی یک سرعت آن هزینه های زیادی دارد . و سرعت تولید هم منتهی به لا<sup>ست</sup>

\* نورد دیره :

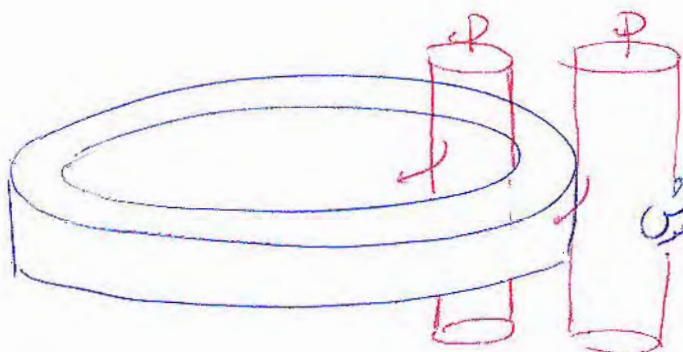
نه نورد گت است و نه نورد مقاطع و پیچیده تر است . برای ساختن نورد از نورد استفاده می شود .

شکل groove جهت باریم آلی این سیم را می بینید

در نتیجه اگر عیب زیادی ایجاد می شود . اما در این خصوص کمترین<sup>ترین</sup> هزینه را دارد

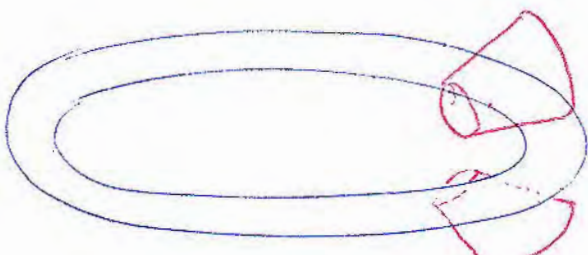


نورد رینگ : Ring Rolling



می خواهیم این رینگ را تولید کنیم بدون درز و عیب

نیز این مدل سعی می شود که

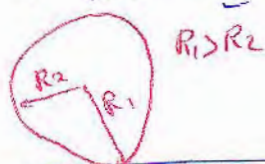


راه تیر : یک نورد دیره تیر :

عندک ها خود را شکل می دهند و در نهایت



تولید لوله ها که در درجه اول از sheet forming استفاده داریم که در درجه اول است



نورد pilger :

یک قطعه از لوله مطابق شکل باید داشت : (در روش رینگ)

(یا اینکه خروج یک شمش) (یا تراشکاری)

عنگ ها با دارای داریم. این ها را چرخه. جابجایی قطعه را میسر است در درجه اول

میکنند - به سیم ریم و جابجایی R2 میسر، قطعه را میسر.

استان از این سنگ ها و جابجایی دارد که این کار را می کنند.

(محل نورد و سنگ است) شمش میسر که سنگ است آن کم شده

در طول آن برآورد است.

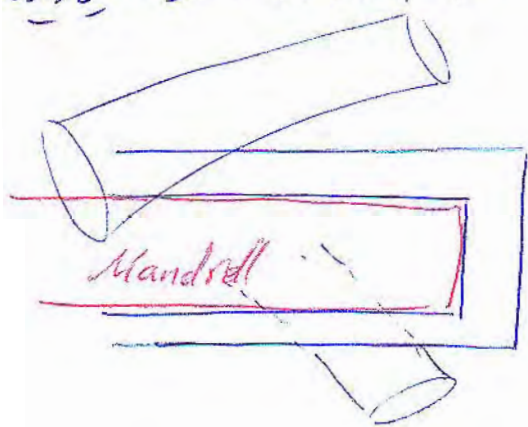
ممکن است در سطح آن نوع های دیگر شود.

در مرحله بعدی می توان کشت لوله هم انجام داد. (در اصل نه)

در سنگ متناظر داریم که بصورت متعادل تراشکاری شده اند و همان کار قبلی را می کنند اما در طول میسر

همه ترانه ایما که. این روش Assel نام دارد

که لوله های با طول متوسط می کنند.

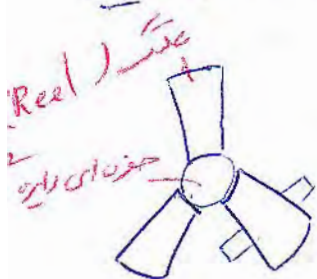


روش رینگ :

عنگ های هونگولدریم با لوله 120 (با سیم ریم چرخه) چیزی که به روش Assel تولید

شده، بعد Mandrell با سیم ریم می توان قطعه ای از این سنگ ها میسر

و لوله کشیده میسر :



طول از 3m تا 8m رسد. این روش مختصر

Mannesman است. (نورد هونگولدریم)

P(4)

بعد از مانسان - SRM است (stretch Reducing Mill)

لوله را غدار میسور را این بار عتک های کار می داریم و مانند رول هم می داریم راین عتک ها واقعاً نزدیک میسور.

قطر داخل قابل کنترل نیست. همین عتک های مانسان را داریم اما حوز گرد برنده. راین جا هم عتک ها

باز میسور 120° را می داریم. قطر خارجی را کم می کنند و طول زیاد میسور. این لوله که طول "

و قطر 3 سانتی دایر است. طول 30 متر رسیده و قطر آن هم کم میسور. شکل در این

قطر داخل است. راین جا قطر داخل polygonize شده (polygonization)



در طراحی SRM سرعت ها نیزان reduction

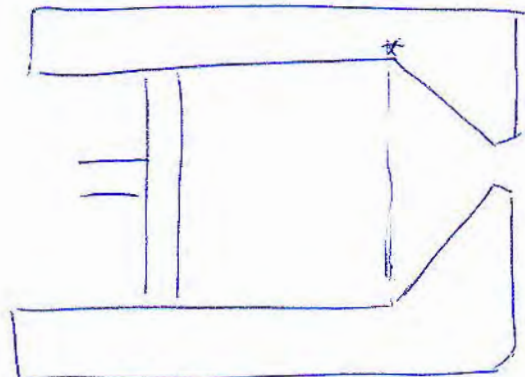
ماتران این محاسبه را کم کرد.

بعد از این روش Tube Drawing (در حالت سرد) ماتران ایجاب دارد

هوا که قطر داخل کنترل نشود این محاسبه دیده میسور.

## اکستردرون :

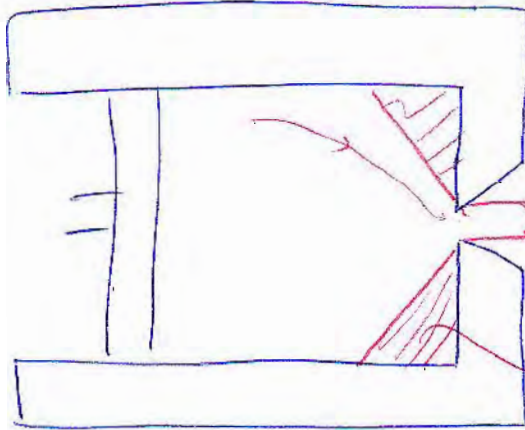
قالب برای صورت ~~مختار~~ میسور. همین سنه تا یک دوری هدیه تا آخ و تا آخری تا آخ هدیه تا آخ



و در ریزه ماده اولی داریم.

در آردون این هم شکلات دارد.

له قالب بصورت زیر طراحی میسور.



redundant work

Dead Zone

فرمولاسیون همان سبک است.

چون

همان اولی میسور قالب و سبک

تغییر شکل نمی دهد. سنه تا آخ

در این

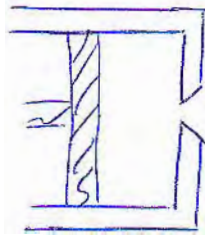


P(5)

زبان redundant work : راستگی و صاف بودن درایع . در زیر درآسترون میانه

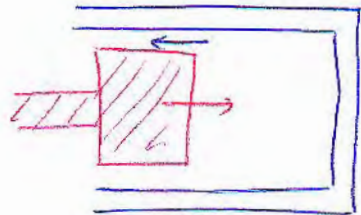


انواع آسترون :



مستقیم : همان مطلب قبلی

غیر مستقیم :



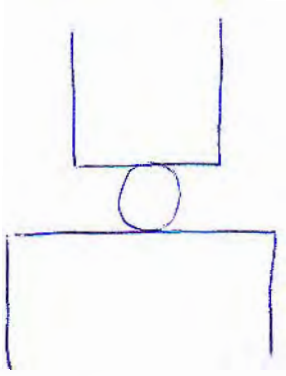
نارده از هجره به بیرون میزنند

برخی لوله های بدون دراز در ابعاد کوتاه به این روش تولید می شود .

در این سیستم عدد یک به دستنه : یا به دور ، برابر وزن یک تبارن خواهیم داشت .

در آسترون مستقیم اصطکاک بیشتر است .

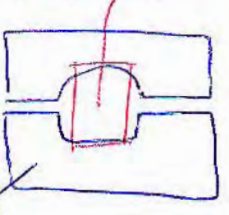
\* خروج :



خروج باز ————— قطعه مستقیم رفته ان بعد از دلت  
خروج قالب بسته

مکانه  
خروج باز محوره در مراحل اولی انجام می شود . مرتباً کاهش دانه  
و تراشگی طول . ( داغ هم انجام می شود )

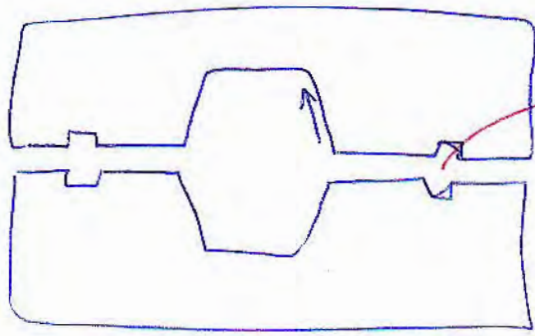
قطع preform (نیمه)  
در نیم قالب داغ  
ابعاد preform  
درم است .



خروج مستقیم } خروج قالب بسته  
خروج دقیق  
(precision forging)

P(6)

چون در اینجا هم تعویض دهنده دارد و، کپردن قالب هم است رساله flash داشته باشد.



Gutter

کنترل کننده سخت ردفل است.

(در موزج همونی)

حد درجه دارد سیلان آلوده هلاک قالب دارد

و Flash ایند شور.

در نتیجه ری هم کنترل شارداغ. اما در موزج هم ترک است چون ماده چابک است. باطله

ماشینکاری است که رساله بریده می شود.

فصلی یعنی: سیدان ماده را می بیند که در شیر زایده هم نداشته باشم - در موزج هم ندارم.

به ازای Gutter استفاده می شود.